CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 3: 22 de fevereiro

Exercício 1 (20 pontos) *Considere* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno canônico e seja* W *o subespaço gerado pelos vetores* $(0,0,1)$ *e* $(0,1,1)$.

(a) *Obtenha uma base ortonormal para* W *utilizando o processo de Gram-Schimidt.*

(b) *Determine a projeção ortogonal do vetor* $(1,0,0)$ *sobre* W.

Exercício 2 (20 pontos) *Sejam* V *um espaço vetorial com produto interno,* $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ *uma base ortonormal e* $u \in V$. *Mostre que*

(a) $u = \sum_{j=1}^n < u, v_j > v_j$.

(b) $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^n < u, v_j >^2$.

Exercício 3 (20 pontos) *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais com produtos internos* $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ *e* $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, *respectivamente. Dizemos que uma transformação linear* $T : V \to W$ *é uma isometria se*

$$\langle Tu, Tv \rangle_W = \langle u, v \rangle_V, \ \forall u, v \in V.$$

Mostre que toda isometria é injetora.

Exercício 4 (40 pontos) *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases},$$

a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *e o vetor* $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) *Verifique que este sistema não possui solução.*

(b) *Argumente sobre a existência de um vetor* $Y \in \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\|AY - b\| < \|AX - b\|, \ \forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{Y\}.$$

(c) *Argumente que o* Y *acima deve ser a solução do sistema*

$$A^t A Y = A^t b.$$

(d) *Determine* Y.

- Talvez seja útil lembrar que se $v_1 \neq 0$, então podemos considerar a construção

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ \ldots \ u_n = \frac{v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, u_j \rangle u_j}{\left\| v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, u_j \rangle u_j \right\|}$$