CMI 022 - Álgebra Linear
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

Exame final: 1 de março

Resolva apenas 5 questões

Exercício 1 (20 pontos) *Verifique se os conjuntos abaixo são L.I. ou L.D.*

(a) $A = \{\cos(x), sen(x)\}$ *no espaço das funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2 (20 pontos) *Sejam*

$$\mathcal{A} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad e \quad \mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,2,1)\}$$

duas bases de $\mathbb{R}^3$*. Obtenha* $[I]_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$*, ou seja, a matriz mudança da base* $\mathcal{A}$ *para* $\mathcal{B}$*.*

Exercício 3 (20 pontos) *Sejam* $\mathbb{P}_3$ *o espaço dos polinômios* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de grau* ≤ 3 *e a base* $\mathcal{A} = \{2, x, -x^2, x^3\}$*. Obtenha* $[D]_{\mathcal{A}}$*, sendo* $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ *a transformação linear derivada.*

Exercício 4 (20 pontos) *Mostre que toda matriz simétrica* 2×2 *é diagonalizável.*

Exercício 5 (20 pontos) *Considere* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno canônico e seja* W *o subespaço gerado pelos vetores* $(0,0,1)$ *e* $(0,1,1)$*.*

(a) Obtenha uma base ortonormal para W *utilizando o processo de Gram-Schimidt.*

(b) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1,0,0)$ *sobre* W*.*

Exercício 6 (20 pontos) *Dizemos que uma matriz* $A_{n\times n}$ *é nilpotente quando existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $A^k = 0$*. Mostre que, exceto a matriz nula, toda matriz nilpotente não é diagonalizável.*

1 Algumas informações que podem ser úteis

Observação 1 *Dado* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, *a solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ x + y + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$$

é $(2b - 2c - a, b - a, a - b + c)$.

Observação 2 *A derivada do polinômio* $p(x) = ax^n$ *é* $p'(x) = anx^{n-1}$.

Observação 3 *Talvez seja útil lembrar que se* $v_1 \neq 0$, *então podemos considerar a construção*

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ \ldots \ u_n = \frac{v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, u_j \rangle u_j}{\left\| v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, u_j \rangle u_j \right\|}$$