CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Espaços vetoriais, subespaços e dependência linear

Exercício 1 *Abaixo temos espaços vetoriais V e subconjuntos $S \subset V$. Verifique quais destes subconjuntos são subespaços. Quando S não for subespaço, indique indique a propriedade que não é satisfeita.*

Relembrando: *Dizemos que S é um subespaço vetorial de V se:*

(S1) $0 \in S$.

(S2) *Se* $u, v \in S$, *então* $u + v \in S$.

(S3) *Se* $u \in S$, *então* $\lambda \cdot u \in S$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.
2. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\}$.
3. $V = \mathbb{R}^3$ *e* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y + z = 0\}$.
4. $V = \mathbb{R}^3$ *e* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y + z = 2\}$.
5. $V = \mathbb{R}^3$ *e* $S = \mathbb{Q}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.
6. $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}$.
7. $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$.
8. $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}); A + A^T = 0\}$.
9. $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}); A - A^T = 0\}$.
10. $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e* $S = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) = f(-x)\}$. *($\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)*

Exercício 2 *Verifique quais afirmações são falsas e quais são verdadeiras. No caso verdadeiro apresente uma justificativa e no falso, um contra-exemplo.*

1. *Sejam V um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços vetoriais de V. Então, $U \cap V$ também é subespaço vetorial.*
2. *Sejam V um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços vetoriais de V. Então, $U \cup V$ também é subespaço vetorial.*

3. Sejam V um espaço vetorial, $U, W \subset V$ e o conjunto

$$S = U + W = \{w = x + y;\ x \in U \quad e \quad y \in W\}$$

Então, S também é subespaço vetorial.

Exercício 3 *A seguir são listados vetores $v_1, \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$. Determine se eles são l.i. ou l.d. usando o seguinte procedimento: interprete a relação $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$ como um sistema linear homogêneo com k incógnitas $a_1, \ldots, a_k$ e n equações. Se o sistema for determinado então o conjunto é l.i. caso contrário o conjunto é l.d.*

1. $\{(1,1,0), (1,0,1)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (3,1,0,2)\}$ *em* $\mathbb{R}^4$.
3. $\{(1,1,0), (1,0,1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$.
4. $\{(1,-2,1,0), (2,1,-1,3), (7,-4,1,3)\}$ *em* $\mathbb{R}^4$.

Exercício 4 *Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que são L.I. os conjuntos:*

(a) $\{f, g\}$, *sendo* $f(x) = \cos(x)$ *e* $g(x) = sen(x)$;

(b) $\{f, g\}$, *sendo* $f(x) = \cosh(x)$ *e* $g(x) = senh(x)$;

(c) $\{f, g, h\}$, *sendo* $f(x) = e^x$ *e* $g(x) = e^{2x}$ *e* $h(x) = e^{3x}$.

Exercício 5 *Sejam V um espaço vetorial e $\{u, v, w\} \subset V$ um conjunto l.i. Mostre que os seguintes conjuntos $\{u, u+v, u+v+w\}$ também são l.i.*

(a) $\{u, u+v, u+v+w\}$;

(b) $\{u-v, u+v\}$;

(c) $\{u, u+v\}$;

(d) $\{u+2v, u+v, u+v+w\}$.

Exercício 6 *Seja $\mathbb{P}_3$ o espaço dos polinômios de grau ≤ 3 e considere*

$$p(t) = 1 + 4t - 2t^2 + t^3,\ \ q(t) = -1 + 9t - 3t^2 + 2t^3, w(t) = -5 + 6t + t^3,\ \ h(t) = 5 + 7t - 5t^2 + 2t^3.$$

(a) *Verifique que $\{p, q, w, h\}$ é l.d.*

(b) *Encontre uma combinação linear $ap + bq + cw + dh = 0$ em que algum dos coeficientes a, b, c, d é diferente de 0*

(c) *Encontre um elemento de $\{p, q, w, h\}$ que é combinação linear dos outros e escreva essa combinação linear.*

Exercício 7 *Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. No caso verdadeiro apresente uma justificativa e no falso, um contra-exemplo. Em todas elas V denota um espaço vetorial com $\dim V = n$.*

1. Se $X \subset V$ tem menos que n elementos então X não é um conjunto gerador.

2. Se $X \subset V$ tem mais que n elementos então X não é l.i.

3. Existe uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $v_1 = 0$.

4. Existe uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $v_2 = 4v_1$.

Exercício 8 *Use os conceitos de dependência e independência linear para mostrar que um sistema linear homogêneo $Ax = 0$ com m equações e n incógnitas não é determinado se $n > m$. (Sugestão: verifique que os vetores cujas coordenadas são as colunas de A formam um conjunto l.d.)*

Exercício 9 *Sejam V um espaço vetorial e $v, w \in V$ dois vetores não nulos tais que $\{v, w\}$ é l.d. Mostre que os conjuntos $\{av : a \in K\}$ e $\{aw : a \in K\}$ são iguais.*

Exercício 10 *Seja A uma matriz 4×3 com entradas reais*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Mostre que existem $b_1, \ldots, b_4$ tal que o sistema linear $AX = B$ é impossível, onde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

(Sugestão: olhe o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores cujas coordenadas são as colunas de A.) Generalize para sistemas com m equações e n incógnitas com $n < m$.