CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3:Transformações lineares

Exercício 1 *Dada uma transformação linear $T : U \to V$ definem-se os conjuntos*

$$ker(T) = \{x \in U;\ T(x) = 0\} \quad e \quad Im(T) = \{y \in V;\ T(x) = y,\ para\ algum\ \ x \in U\}.$$

(a) Mostre que $ker(T)$ é subespaço vetorial de U.

(b) Mostre que $Im(T)$ é subespaço vetorial de V.

(c) Mostre que T é injetiva se, e somente se, $ker(T) = \{0\}$.

Exercício 2 *Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = 0$ (isto é, $T \circ T$ é a transformação linear identicamente nula). Mostre que T não é injetora.*

Exercício 3 *Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$T(x, y, z) = (x + z, 2x + 2y + z, x + y + z)$$

(a) Mostre que T é linear.

(b) Mostre que T é injetiva.

(c) Mostre que T é sobrejetiva.

(d) Encontre T^{-1}.

Exercício 4 *Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do espaço vetorial V. Considere a transformação linear $T : V \to V$ tal que $T(v_1) = 0$, $T(v_2) = v_1$ e $T(v_3) = v_2$.*

(a) Encontre $T(v_1 + v_2)$ e $T(v_1 + v_2 + v_3)$.

(b) Encontre uma base de $\ker(T)$ e de $Im(T)$.

Exercício 5 *Considere duas transformações lineares $T : V \to V$ e $S : V \to V$ tais que $T \circ S = S \circ T$.*

(a) Mostre que se $v \in ker(S)$ então $Tv \in \ker(S)$

(b) Mostre também que se $v \in Im(S)$ então $Tv \in Im(S)$.

Exercício 6 *Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to U$ transformações lineares.*

1. *Mostre que $\ker T \subset \ker(S \circ T)$. Mostre também que se $S \circ T$ é injetora então T também é injetora.*

2. *Mostre que* $Im\,(S \circ T) \subset ImS$. *Mostre também que se* $S \circ T$ *é sobrejetora então* S *também é sobrejetora.*

3. *Mostre que se* $S \circ T$ *é injetora então* $\dim V \leq \dim W$.

4. *Mostre que se* $S \circ T$ *é sobrejetora então* $\dim U \geq \dim W$.

Exercício 7 *Sejam* A *uma matriz* $n \times m$ *e* B *uma matriz* $m \times k$. *Mostre que se o sistema linear homogêneo* $(AB)\,X = 0$ *é determinado então o sistema linear* $BX = 0$ *também é determinado. (Compare com o item (a) do exercício anterior.)*

Exercício 8 *Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. No caso verdadeiro apresente uma justificativa e no falso, um contra-exemplo. Em cada um dos itens* $V \neq \{0\}$ *denota um espaço vetorial de dimensão finita.*

1. *Toda transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *é sobrejetora.*

2. *Toda transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *é injetora.*

3. *Sejam* $T : V \to W$ *e* $S : W \to U$ *transformações lineares. Se* S *e* T *são isomorfismos então* $S \circ T$ *é isomorfismo.*

4. *Sejam* $T : V \to W$ *e* $S : W \to U$ *transformações lineares. Se* $S \circ T$ *é isomorfismo então* S *e* T *são isomorfismos.*