# CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

**Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

---

## LISTA 4: Autovalores e autovetores

---

**Exercício 1** *Resolva os exercícios das seções 6.1 e 6.3 do livro do Leon. (Seções referentes a oitava edição. Os títulos das seções são: Autovalores e Autovetores / Diagonalização) .*

**Exercício 2** *Verifique quais das transformações lineares abaixo são diagonalizáveis.*

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-y, x)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (y, z, 0)$.
3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x + y - 2z, 3y - 2z, y)$.
4. $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$.

**Exercício 3** *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que tem os auto-valores* $2$ *e* $3$*. Suponha que* $(1, 2)$ *é auto-vetor associado ao auto-valor* $2$ *e que* $(-1, 1)$ *é autovetor associado ao autovalor* $3$*. Escreva a expressão de* $T(x, y)$*.*

**Exercício 4** *Dado o operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *seja* $A = [T]_\alpha^\alpha$ *a matriz de* $T$ *na base* $\alpha$ *de* $\mathbb{R}^2$*. Mostre que o polinômio característico de* $T$ *é* $p_T(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr} A)\lambda + \det A$*.*

**Exercício 5** *Seja* $T : V \to V$ *uma transformação linear sobre o espaço* $V$ *de dimensão finita* $n$ *.*

(a) *Mostre que se* $v$ *é autovetor de* $T$ *então* $\beta v$ *também o é, seja qual for* $\beta \in \mathbb{R}$*.*

(b) *Sejam* $v$ *e* $w$ *autovetores associados a autovalores* $\lambda$ *e* $\gamma$*, respectivamente. Mostre que se* $\lambda \neq \gamma$*, então* $\{v, w\}$ *é L.I.*

(c) *Mostre que se* $T$ *possui* $n$ *autovalores distintos, então* $T$ *é diagonalizável, isto é, existe em* $V$ *uma base formada por autovetores de* $T$*.*

**Exercício 6** *Seja* $T : V \to V$ *uma transformação linear bijetora e* $\lambda$ *um autovalor de* $T$*. Mostre que:*

(a) $\lambda \neq 0$.

(b) $\lambda^{-1}$ *é autovalor de* $T^{-1}$*.*

(c) *se* $T$ *é diagonalizável se, e só se,* $T^{-1}$ *também o é.*

**Exercício 7** *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear e* $\lambda$ *um auto-valor de* $T$*. Mostre que* $\lambda^2$ *é auto-valor de* $T^2 = T \circ T$*, com os mesmos auto-vetores. Generalize mostrando que* $\lambda^k$ *é auto-valor de* $T^k = T \circ \cdots \circ T$*, também com os mesmos auto-vetores. Conclua que se* $T$ *é diagonalizável então* $T^k$ *também é diagonalizável.*

**Exercício 8** *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $\alpha$ uma base de $V$. Suponha que $0$ não é auto-valor de $T$ e mostre que* $\det [T]_{\alpha}^{\alpha} \neq 0$.

**Exercício 9** *Sejam $V$ um espaço vetorial com* $\dim V = 2$, *$\alpha = \{v, w\}$ uma base de $V$ e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T(v) = 0$ e $T(w) = v$. Mostre que $T$ não é diagonalizável. (Sugestão: trabalhe com $[T]_{\alpha}^{\alpha}$.)*

**Exercício 10** *Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. No caso verdadeiro apresente uma justificativa e no falso, um contra-exemplo.*

*Em cada um dos itens $V \neq \{0\}$ denota um espaço vetorial de dimensão finita.*

1. *Sejam $T : V \to V$ um operador diagonalizável e $\alpha$ uma base de $V$. Então, existe uma matriz inversível $P$ tal que $P [T]_{\alpha}^{\alpha} P^{-1}$ é diagonal.*

2. *Se $T : V \to V$ é diagonalizável então as raízes do polinômio característico $p_T(\lambda)$ de $T$ são simples (isto é, não têm multiplicidade).*