CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

12 de Dezembro

Aula de hoje: Revisão: autovalores, autovetores e diagonalização

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Autovalores e autovetores de matrizes

Definição

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz real. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um **autovetor** de A se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0,$$

sendo $I = I_{n\times n}$ a matriz identidade.

- Neste caso, dizemos que λ é um autovalor de A associado a v.
- O espaço E_λ gerado pelos autovetores associados a λ é chamado de autoespaço.
- O polinômio característico de A é, por definição $p_A(x) = \det(A - xI)$.

Observação

- Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A se, e somente se, $p_A(\lambda) = 0$.
- A multiplicidade **algébrica** de λ é sua multiplicidade como raiz de $p_A(x)$.
- A multiplicidade **geométrica** de λ é a dimensão de E_λ.
- Sempre vale que $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Exemplo 1

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Temos $p_A(x) = x(1-x)(x-3)$, donde $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$.
- Note que $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$, logo $m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$.
- Para obter os autovetores associados, devemos resolver cada um dos sistemas

$$(A - \lambda_1 I)v = 0,\ (A - \lambda_2 I)u = 0 \text{ e } (A - \lambda_3 I)w = 0.$$

- Obtêm-se:

$$E_{\lambda_1} = Ger\{(1,1,-1)\},\ E_{\lambda_2} = Ger\{(1,-1,0)\} \text{ e } E_{\lambda_3} = Ger\{(1,1,2)\}$$

Exemplo 2

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Temos $p_A(x) = -x(x-1)^2$, donde $\lambda_1 = 0$, e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
- Note que $m_a(\lambda_1) = 1$ e $m_a(\lambda_2) = 2$. Assim, $m_g(\lambda_1) = 1$ e $m_g(\lambda_2) = 1$, ou $m_g(\lambda_2) = 2$.
- Para obter os autovetores associados, devemos resolver cada um dos sistemas

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \text{ e } (A - \lambda_2 I)w = 0.$$

- Obtêm-se:

$$E_{\lambda_1} = Ger\{(1,1,1)\} \text{ e } E_{\lambda_2} = E_{\lambda_3} = Ger\{(3,1,0),(-1,0,1)\}.$$

Exemplo 3

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Temos $p_A(x) = (4-x)(2-x)^2$, donde $\lambda_1 = 4$, e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.
- Note que $m_a(\lambda_1) = 1$ e $m_a(\lambda_2) = 2$. Assim, $m_g(\lambda_1) = 1$ e $m_g(\lambda_2) = 1$, ou $m_g(\lambda_2) = 2$.
- Para obter os autovetores associados, devemos resolver cada um dos sistemas

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \ \text{ e } \ (A - \lambda_2 I)w = 0.$$

- Obtêm-se:

$$E_{\lambda_1} = Ger\{(0,1,0)\} \ \text{ e } \ E_{\lambda_2} = E_{\lambda_3} = Ger\{(0,0,1)\}.$$

- Note que $m_g(\lambda_2) = 1$.

Diagonalização de matrizes

Definição

Dizemos que uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se existe uma base em $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A.

Exemplos

- As matrizes dos exemplos (1) e (2) são diagonalizáveis.
- A matriz do exemplo (3) não é diagonalizável.

Teorema

Uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz invertível $S_{n\times n}$ tal que

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1},$$

sendo $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Autovalores e autovetores de transformações lineares

Definição

Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é um autovetor de T se existe um número real λ tal que

$$T(v) = \lambda v \iff (T - \lambda I)(v) = 0,$$

sendo I a transformação linear identidade.

- Neste caso, dizemos que λ é um autovalor de T associado a v.
- O espaço E_λ gerado pelos autovetores associados a λ é chamado de autoespaço. A multiplicidade **geométrica** de λ é a dimensão de E_λ.

Exemplo 1

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + z)$.

- Queremos então obter $v = (a, b, c) \neq 0$ e λ tais que

$$T(a, b, c) = \lambda(a, b, c),$$

ou seja,

$$\begin{cases} a + c = \lambda a \\ b + c = \lambda b \\ a + b + 2c = \lambda c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Como $v \neq 0$, então $\lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3) = 0$, donde $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$.
- Assim,

$$E_{\lambda_1} = Ger\{(1, 1, -1)\},\ E_{\lambda_2} = Ger\{(1, -1, 0)\} \text{ e } E_{\lambda_3} = Ger\{(1, 1, 2)\}$$

Representação matricial

Teorema

Sejam V um espaço de dimensão n, $T : V \to V$ uma transformação linear e $\mathcal{B}$ uma base de V. Neste caso, $v \in V$ é autovetor de T (com autovalor λ) se , e somente se,

$$A\omega = \lambda\omega,$$

sem que $\omega \in \mathbb{R}^n$ denota as coordenadas de v com respeito a $\mathcal{B}$ e $A = [T]_{\mathcal{B}}$.

Observação

Dadas duas bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de V existe uma matriz inversível S tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = S \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot S^{-1}.$$

Assim,

$$p_{[T]_{\mathcal{A}}}(x) = p_{[T]_{\mathcal{B}}}(x).$$

Definição

Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. O polinômio característico de T é, por definição,

EXEMPLO 2

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + z)$.

- Com respeito a base canônica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ chaga-se em

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Assim, basta utilizar o exemplo anterior.

Exemplo 3

Considere $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ dada por

$$T(y) = y'' - 2y + y$$

- Com respeito a base canônica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ temos

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Assim, $p_T(s) = (1-s)^3$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
- Segue que o autoespaço da matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ é gerado por $(1, 0, 0)$.
- Logo, $E_{\lambda_1} = Ger\{1\}$.

Diagonalização de transformações lineares

Definição

Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que T é diagonalizável se existe uma base em V formada por autovetores de T.

Exemplos

- Nos exemplos (1) e (2) temos transformações diagonalizáveis.
- A transformação do exemplo (3) não é diagonalizável.

Teorema

Sejam V um espaço de dimensão finita n e $T : V \to V$ uma transformação linear. Então, T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ na qual $[T]_{\mathcal{C}}$ é uma matriz diagonal.