CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

8 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Projeção ortogonal

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Produto interno

Definição

Um produto interno num espaço vetorial V é uma função $P : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $p(\alpha x + y, z) = \alpha p(x,z) + p(y,z)$.

(b) $p(x,x) \geq 0$, valendo a igualdade apenas quando $x = 0$.

(c) $p(x,y) = p(y,x)$.

Observações

- Utilizamos a notação $P(x,y) =< x, y >$.
- Note que $< x, \alpha y + z >= \alpha < x, y > + < x, z >$.

Norma

Definição

Num espaço com produto interno $(V, < \cdot, \cdot >)$ defini-se o número $\|x\| = (< x, x >)^{1/2}$. Em particular, valem as seguintes propriedades:

- $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

NORMA

DEFINIÇÃO

Num espaço com produto interno $(V, < \cdot, \cdot >)$ defini-se o número $\|x\| = (< x, x >)^{1/2}$. Em particular, valem as seguintes propriedades:

- $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

OBSERVAÇÕES

- Se θ denota o ângulo entre dois vetores não nulos x, y, então $\cos(\theta) = \dfrac{< x, y >}{\|x\| \|y\|}$.
- Dois vetores não nulos x, y são ditos ortogonais se $< x, y >= 0$. Neste caso, escrevemos $x \perp y$.

Projeção ortogonal

Definição

Dados dois vetores não nulos x, y num espaço com produto interno, definem-se

$$\alpha = \frac{< x, y >}{\|y\|} \text{ e } p = \frac{< x, y >}{< y, y >} y$$

- O número α é dito **projeção escalar** de x sobre y e 0 vetor p é dito **projeção ortogonal** de x sobre y.
- Em particular, $x - p$ é ortogonal a y.

Projeção ortogonal

Definição

Dados dois vetores não nulos x, y num espaço com produto interno, definem-se

$$\alpha = \frac{< x, y >}{\|y\|} \text{ e } p = \frac{< x, y >}{< y, y >} y$$

- O número α é dito **projeção escalar** de x sobre y e 0 vetor p é dito **projeção ortogonal** de x sobre y.
- Em particular, $x - p$ é ortogonal a y.

Observação

Note que se $\|y\| = 1$, então $p =< x, y > y$.

Projeção ortogonal

Definição

Dados dois vetores não nulos x, y num espaço com produto interno, definem-se

$$\alpha = \frac{< x, y >}{\|y\|} \text{ e } p = \frac{< x, y >}{< y, y >} y$$

- O número α é dito **projeção escalar** de x sobre y e 0 vetor p é dito **projeção ortogonal** de x sobre y.
- Em particular, $x - p$ é ortogonal a y.

Observação

Note que se $\|y\| = 1$, então $p =< x, y > y$.

Aplicação

Obter o ponto Q pertencente a reta $y = x/3$ mais próximo do ponto $(1, 4)$.

Definição

Sejam V um espaço com produto interno

Definição

Sejam V um espaço com produto interno

(a) Se U é um subconjunto de V, então denotamos por $U^{\perp}$ o conjunto dos vetores $v \in V$ que são ortogonais a U. Isto é,

$$U^{\perp} = \{v \in V;\ v \perp u,\ \forall u \in U\}.$$

Definição

Sejam V um espaço com produto interno

(a) Se U é um subconjunto de V, então denotamos por $U^{\perp}$ o conjunto dos vetores $v \in V$ que são ortogonais a U. Isto é,

$$U^{\perp} = \{v \in V;\ v \perp u,\ \forall u \in U\}.$$

(b) Dizemos que dois subespaços U, W são ortogonais se $u \perp w$, para todo $u \in U$ e todo $w \in W$.Neste caso, escrevemos $U \perp W$.

Definição

Sejam V um espaço com produto interno

(a) Se U é um subconjunto de V, então denotamos por $U^{\perp}$ o conjunto dos vetores $v \in V$ que são ortogonais a U. Isto é,

$$U^{\perp} = \{v \in V;\ v \perp u,\ \forall u \in U\}.$$

(b) Dizemos que dois subespaços U, W são ortogonais se $u \perp w$, para todo $u \in U$ e todo $w \in W$.Neste caso, escrevemos $U \perp W$.

Observação

- Se $U \perp W$, então $U \cap W = \{0\}$.

Definição

Sejam V um espaço com produto interno

(a) Se U é um subconjunto de V, então denotamos por $U^{\perp}$ o conjunto dos vetores $v \in V$ que são ortogonais a U. Isto é,

$$U^{\perp} = \{v \in V;\ v \perp u,\ \forall u \in U\}.$$

(b) Dizemos que dois subespaços U, W são ortogonais se $u \perp w$, para todo $u \in U$ e todo $w \in W$.Neste caso, escrevemos $U \perp W$.

Observação

- Se $U \perp W$, então $U \cap W = \{0\}$.
- Se U é um subespaço de V, então $U^{\perp}$ também é um subespaço.

ORTOGONALIDADE E LINEARIDADE

DEFINIÇÃO

Sejam V um espaço com produto interno. Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é dito:

(a) **ortogonal** se $v_j \perp v_k$, para todo $j \neq k$.

(b) **ortonormal** se é ortogonal e $\|v_j\| = 1$, para todo j.

Ortogonalidade e linearidade

Definição

Sejam V um espaço com produto interno. Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é dito:

(a) **ortogonal** se $v_j \perp v_k$, para todo $j \neq k$.

(b) **ortonormal** se é ortogonal e $\|v_j\| = 1$, para todo j.

Proposição

Se $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é ortonormal, então S é l.i.

Ortogonalidade e linearidade

Definição

Sejam V um espaço com produto interno. Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é dito:

(a) **ortogonal** se $v_j \perp v_k$, para todo $j \neq k$.

(b) **ortonormal** se é ortogonal e $\|v_j\| = 1$, para todo j.

Proposição

Se $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é ortonormal, então S é l.i.

Definição

Se $dim(V) = n$, então um conjunto ortonormal com n elementos é dito base ortonormal.

Ortogonalidade e linearidade

Definição

Sejam V um espaço com produto interno. Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é dito:

(a) **ortogonal** se $v_j \perp v_k$, para todo $j \neq k$.

(b) **ortonormal** se é ortogonal e $\|v_j\| = 1$, para todo j.

Proposição

Se $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é ortonormal, então S é l.i.

Definição

Se $dim(V) = n$, então um conjunto ortonormal com n elementos é dito base ortonormal.

Teorema

Seja $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Então, dado $u \in V$ vale

$$u = \sum_{j=1}^{n} < u, v_j > v_j.$$

Exemplo

- O conjunto
$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$
é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Projeção ortogonal sobre subespaços

Teorema

Sejam V um espaço com produto interno e U o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, \dots, u_n\}$. Fixado $w \in V$, defina

$$v = w - \sum_{j=1}^{n} < w, u_j > u_j$$

Nestas condições, $v \in U^{\perp}$. Em particular, o vetor $\sum_{j=1}^{n} < w, u_j > u_j$ é dito **projeção ortogonal** de w em U.

Projeção ortogonal sobre subespaços

Teorema

Sejam V um espaço com produto interno e U o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Fixado $w \in V$, defina

$$v = w - \sum_{j=1}^{n} < w, u_j > u_j$$

Nestas condições, $v \in U^{\perp}$. Em particular, o vetor $\sum_{j=1}^{n} < w, u_j > u_j$ é dito **projeção ortogonal** de w em U.

Exemplo

Os vetores $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^3$. Vamos obter a projeção de $w = (2, 3, 1)$ sobre o espaço gerado por eles.

PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

TEOREMA (GRAM-SCHMIDT)

Todo espaço com produto interno de dimensão finita possui uma base ortonormal

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema (Gram-Schmidt)

Todo espaço com produto interno de dimensão finita possui uma base ortonormal

Ideia da prova: Indução

- Se $dim(V) = 1$, então tomamos $v \in V \setminus \{0\}$ e então temos $\{u_1\}$, sendo $u_1 = v/\|v\|$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema (Gram-Schmidt)

Todo espaço com produto interno de dimensão finita possui uma base ortonormal

Ideia da prova: Indução

- Se $dim(V) = 1$, então tomamos $v \in V \setminus \{0\}$ e então temos $\{u_1\}$, sendo $u_1 = v/\|v\|$.
- Se $dim(V) = 2$, então considere $V = Ger\{v_1, v_2\}$. Defina então $u_1 = v_1/\|v_1\|$. Por sua vez, defina
$$\widetilde{u}_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1$$
e finalmente
$$u_2 = \frac{\widetilde{u}_2}{\|\widetilde{u}_2\|}.$$

PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

TEOREMA (GRAM-SCHMIDT)

Todo espaço com produto interno de dimensão finita possui uma base ortonormal

Ideia da prova: Indução

- Se $dim(V) = 1$, então tomamos $v \in V \setminus \{0\}$ e então temos $\{u_1\}$, sendo $u_1 = v/\|v\|$.
- Se $dim(V) = 2$, então considere $V = Ger\{v_1, v_2\}$. Defina então $u_1 = v_1/\|v_1\|$. Por sua vez, defina
$$\widetilde{u}_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1$$
e finalmente
$$u_2 = \frac{\widetilde{u}_2}{\|\widetilde{u}_2\|}.$$
- Assim, obtemos $\{u_1, u_2\}$ um conjunto ortonormal. A prova segue então por indução: Assumindo que o resultado é válido para um espaço de dimensão n devemos provar que vale para um espaço de dimensão $n + 1$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

- De modo geral:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - < v_2, u_1 > u_1}{\|v_2 - < v_2, u_1 > u_1\|}.$$

$$u_3 = \frac{v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2}{\|v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2\|}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{v_n - < v_n, u_1 > u_1 - \ldots - < v_n, u_{n-1} > u_{n-1}}{\|v_n - < v_n, u_1 > u_1 - \ldots - < v_n, u_{n-1} > u_{n-1}\|}$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

- De modo geral:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - < v_2, u_1 > u_1}{\|v_2 - < v_2, u_1 > u_1\|}.$$

$$u_3 = \frac{v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2}{\|v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2\|}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{v_n - < v_n, u_1 > u_1 - \ldots - < v_n, u_{n-1} > u_{n-1}}{\|v_n - < v_n, u_1 > u_1 - \ldots - < v_n, u_{n-1} > u_{n-1}\|}$$

Exemplo

Vamos obter uma base ortonormal para o espaço $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0\}$.