CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

15 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Formas bilineares

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

FORMA BILINEAR

DEFINIÇÃO

Sejam U e V dois espaço vetoriais. Uma função $B : U \times V \to \mathbb{R}$ é dita uma **forma bilinear** se for linear em cada uma das duas variáveis, isto é:

- $B(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda B(u_1, v) + B(u_2, v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in U$ e $\forall v \in V$.
- $B(u, \beta v_1 + v_2) = \beta B(u, v_1) + B(u, v_2), \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V \ \forall u \in U$.

Forma bilinear

Definição

Sejam U e V dois espaço vetoriais. Uma função $B : U \times V \to \mathbb{R}$ é dita uma **forma bilinear** se for linear em cada uma das duas variáveis, isto é:

- $B(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda B(u_1, v) + B(u_2, v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in U$ e $\forall v \in V$.
- $B(u, \beta v_1 + v_2) = \beta B(u, v_1) + B(u, v_2), \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V\ \forall u \in U$.

O espaço de todas as formas bilineares $B : U \times V \to \mathbb{R}$ será denotado por $\mathcal{B}(U, V)$. Quando $U = V$ escrevemos apenas $\mathcal{B}(U)$.

Exemplos

Produto interno

Todo produto interno em V é uma forma bilinear em $\mathcal{B}(V)$.

Exemplos

Produto interno

Todo produto interno em V é uma forma bilinear em $\mathcal{B}(V)$.

Traço

Considere $V = \mathbb{M}_{m\times n}$ e $A \in \mathbb{M}_{m\times m}$. Temos então a forma bilinear $f_A : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_A(X, Y) = tr(X^t AY).$$

Exemplos

Produto interno

Todo produto interno em V é uma forma bilinear em $\mathcal{B}(V)$.

Traço

Considere $V = \mathbb{M}_{m\times n}$ e $A \in \mathbb{M}_{m\times m}$. Temos então a forma bilinear $f_A : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_A(X, Y) = tr(X^t AY).$$

Em particular, se $n = 1$, então

$$f_A(X, Y) = X^t AY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$
$$=< Ay, x >$$

Em caso de dimensão finita

- Suponha que U e V são espaços de dimensão finita e sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Considere $u \in U$, $v \in V$ e sejam

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)_{\mathcal{B}}, \; v = (\beta_1, \dots, \beta_n)_{\mathcal{C}}$$

suas coordenadas.

Em caso de dimensão finita

- Suponha que U e V são espaços de dimensão finita e sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Considere $u \in U$, $v \in V$ e sejam
$$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)_{\mathcal{B}}, \ v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{C}}$$
suas coordenadas. Assim, se $f \in \mathcal{B}(U, V)$, então
$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_{ij} \beta_j, \ \text{ sendo } \ a_{ij} = f(u_i, v_j).$$
- Portanto, $f(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^t \, A \, [v]_{\mathcal{C}}$, sendo $A = (a_{ij})$.

EM CASO DE DIMENSÃO FINITA

- Suponha que U e V são espaços de dimensão finita e sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Considere $u \in U$, $v \in V$ e sejam

$$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)_{\mathcal{B}}, \; v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{C}}$$

  suas coordenadas. Assim, se $f \in \mathcal{B}(U, V)$, então

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_{ij} \beta_j, \;\; \text{sendo} \;\; a_{ij} = f(u_i, v_j).$$

- Portanto, $f(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^t \, A \, [v]_{\mathcal{C}}$, sendo $A = (a_{ij})$.

DEFINIÇÃO

Denotamos por $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A = (a_{ij})$ matriz de f com respeito as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Em caso de dimensão finita

- Suponha que U e V são espaços de dimensão finita e sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Considere $u \in U$, $v \in V$ e sejam
$$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)_{\mathcal{B}}, \; v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{C}}$$
suas coordenadas. Assim, se $f \in \mathcal{B}(U, V)$, então
$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_{ij} \beta_j, \;\; \text{sendo} \;\; a_{ij} = f(u_i, v_j).$$
- Portanto, $f(u, v) = [u]^t_{\mathcal{B}} \, A \, [v]_{\mathcal{C}}$, sendo $A = (a_{ij})$.

Definição

Denotamos por $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A = (a_{ij})$ matriz de f com respeito as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Exemplo

Vamos obter a matriz da forma $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dada por
$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2,$$
com respeito a base canônica.

Formas simétricas

Definição

Uma forma bilinear $f \in \mathcal{B}(V)$ é dita simétrica se

$$f(u,v) = f(v,u),\ \forall u,v \in V.$$

Denotamos por $\mathcal{B}_s(V)$ o espaço das forma simétricas.

Formas simétricas

Definição

Uma forma bilinear $f \in \mathcal{B}(V)$ é dita simétrica se

$$f(u,v) = f(v,u), \ \forall u,v \in V.$$

Denotamos por $\mathcal{B}_s(V)$ o espaço das forma simétricas.

Teorema

Sejam V um espaço de dimensão finita n e $f \in \mathcal{B}(V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é simétrica.

(b) $[f]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz simétrica para toda base $\mathcal{B}$ de V.

(b) $[f]_{\mathcal{C}}$ é uma matriz simétrica para alguma base $\mathcal{C}$ de V.

Formas simétricas

Definição

Uma forma bilinear $f \in \mathcal{B}(V)$ é dita simétrica se

$$f(u,v) = f(v,u), \ \forall u, v \in V.$$

Denotamos por $\mathcal{B}_s(V)$ o espaço das forma simétricas.

Teorema

Sejam V um espaço de dimensão finita n e $f \in \mathcal{B}(V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é simétrica.

(b) $[f]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz simétrica para toda base $\mathcal{B}$ de V.

(b) $[f]_{\mathcal{C}}$ é uma matriz simétrica para alguma base $\mathcal{C}$ de V.

Teorema

Sejam V um espaço de dimensão finita n e $f \in \mathcal{B}_s(V)$. Nestas condições, existe uma base $\mathcal{B}$ na qual $[f]_{\mathcal{B}}$ é diagonal.

Exemplos

- Todo produto interno (em espaços reais) é uma forma bilinear simétrica.

Exemplos

- Todo produto interno (em espaços reais) é uma forma bilinear simétrica.
- A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

  é uma forma bilinear não simétrica.

Formas quadráticas

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V)$. A função $q : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(v) = f(v, v)$$

é dita forma quadrática associada a f.

Exemplos

- Considere $V = \mathbb{R}^n$ e $f(u,v) =< u, v >$. A forma quadrática associada a f é dada por

$$q(u) = f(u,u) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Exemplos

- Considere $V = \mathbb{R}^n$ e $f(u,v) =< u, v >$. A forma quadrática associada a f é dada por

$$q(u) = f(u,u) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

- Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

e a forma bilinear $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$f((x,y),(z,w)) =< A \cdot (x,y),(z,w) > .$$

Exemplos

- Considere $V = \mathbb{R}^n$ e $f(u,v) =< u,v >$. A forma quadrática associada a f é dada por

$$q(u) = f(u,u) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

- Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

e a forma bilinear $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$f((x,y),(z,w)) =< A \cdot (x,y),(z,w) > .$$

Temos neste caso a forma quadrática

$$q(x,y) = f((x,y),(x,y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Reconhecimento de quádricas

Definição

Uma equação quadrática nas variáveis x e y é uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

Reconhecimento de quádricas

Definição

Uma equação quadrática nas variáveis x e y é uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

- Note que (1) pode ser reescrita como

$$< Au, u > + < (d, e), u > + f = 0 \tag{2}$$

em que $u = (x, y)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Reconhecimento de quádricas

Definição

Uma equação quadrática nas variáveis x e y é uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

- Note que (1) pode ser reescrita como

$$< Au, u > + < (d, e), u > + f = 0 \tag{2}$$

em que $u = (x, y)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

- Assim, $< Au, u >$ é uma forma quadrática associada a (1).

Reconhecimento de quádricas

Algumas cônicas

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ (circunferência)}$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ (elipse)}$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ ou } \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \text{ (hipérbole)}$$

$$x^2 = \alpha y, \text{ ou} y^2 = \alpha x, \text{ (parábola)}$$

Exemplo

- Vamos determinar a cônica

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$$

Exemplo

- Vamos determinar a cônica

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$$

- Esse é um caso simples, pois a cônica foi apenas deslocada horizontalmente e verticalmente. O problema de identificação fica mais complicado quando ocorre uma rotação dos eixos. Por exemplo,

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}y - 4 = 0$$

Cônicas rotacionadas

- Retornemos a equação

$$< Au, u > + < (d, e), u > + f = 0 \tag{3}$$

Cônicas rotacionadas

- Retornemos a equação

$$< Au, u > + < (d, e), u > +f = 0 \tag{3}$$

- Supondo que houve uma rotação, então a ideia é fazer uma mudança de variáveis que corrija esse problema. Façamos então

$$u = Q\widetilde{u}, \text{ ou equivalentemente } \widetilde{u} = Q^t u,$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \; 0 < \theta < \pi.$$

Cônicas rotacionadas

- Retornemos a equação

$$< Au, u > + < (d, e), u > +f = 0 \tag{3}$$

- Supondo que houve uma rotação, então a ideia é fazer uma mudança de variáveis que corrija esse problema. Façamos então

$$u = Q\widetilde{u}, \text{ ou equivalentemente } \widetilde{u} = Q^t u,$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \ 0 < \theta < \pi.$$

- Assim, a equação (3) se escreve como

$$< AQ\widetilde{u}, Q\widetilde{u} > + < (\widetilde{d}, \widetilde{e}), \widetilde{u} > +f = 0,$$

sendo $(\widetilde{d}, \widetilde{e}) = Q^t(d, e)$.

- Note que

$$< AQ\widetilde{u}, Q\widetilde{u} >= \widetilde{u}^t(Q^tAQ)\widetilde{u}.$$

Portanto, não teremos termos mistos se, e somente se, Q^tAQ é diagonal.

- Note que
$$< AQ\widetilde{u}, Q\widetilde{u} >= \widetilde{u}^t(Q^tAQ)\widetilde{u}.$$
Portanto, não teremos termos mistos se, e somente se, Q^tAQ é diagonal.
- Finalmente, pondo
$$Q^tAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ e } \widetilde{u} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$$
iremos obter
$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + \lambda_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{d}\widetilde{x} + \widetilde{e}\widetilde{y} + f = 0$$

Exemplo

- Vamos estudar a cônica
$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$$

Exemplo

- Vamos estudar a cônica
$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$$
- A equação acima se escreve como
$$< A(x,y), (x,y) >= 8,$$
sendo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

- Vamos estudar a cônica
$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$$
- A equação acima se escreve como
$$< A(x, y), (x, y) >= 8,$$
sendo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
- Os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$, com respectivos autovetores unitários
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exemplo

- Logo, tomando

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

obtemos

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Logo, tomando

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

  obtemos

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Finalmente, temos

$$2\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 = 8$$