CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 DE DEZEMBRO

Aula de hoje:Matrizes de transformações lineares

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., UM CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR
- LIMA, E. L., ÁLGEBRA LINEAR.
- LEON, S. J. ., ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES.

Transformação linear

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se valem as seguintes propriedades:

(a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in U$.

(b) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação

- Sejam $T : U \to V$ uma transformação linear, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_k \in U$. Então

$$T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T(u_j)$$

- Seja $A_{m\times n}$ uma matriz real. Temos então a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$T_A(v) = A \cdot v.$$

Matrizes de transformações lineares

Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita, $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V.

MATRIZES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita, $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V.

- Para u_1, existem $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$ tais que

$$T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{m1}v_m.$$

- Para u_2, existem $a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{m2}$ tais que

$$T(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{m2}v_m.$$

- Continuando, obtemos para u_j escalares $a_{1j}, a_{2j}, \alpha_{3n}, \ldots, a_{mj}$ tais que

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + a_{3j}v_3 + \ldots + a_{mj}v_m.$$

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita, $T : U \to V$ uma transformação linear. Dadas $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V, a matriz **da transformação** T, com respeito a estas bases, é a matriz

$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita, $T : U \to V$ uma transformação linear. Dadas $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V, a matriz **da transformação** T, com respeito a estas bases, é a matriz

$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definição

Quando $U = V$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ escreveremos apenas $[T]_{\mathcal{A}}$.

Exemplos

EXEMPLOS

- Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (2x + y, y - x, 3x)$$

e as bases $\mathcal{A} = \{(1, 2), (2, -1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Neste caso,

$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

Exemplos

- Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (2x+y, y-x, 3x)$$

e as bases $\mathcal{A} = \{(1,2),(2,-1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$. Neste caso,

$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

- Considere a transformação linear $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ dada por

$$D(p) = p'$$

e as bases $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Neste caso,

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- Retornando às notações $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de V e $T : U \to V$ uma transformação linear, temos:

- Retornando às notações $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de V e $T : U \to V$ uma transformação linear, temos:

$$T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{m1}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}v_i$$

$$\vdots$$

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + a_{3j}v_3 + \ldots + a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i$$

$$\vdots$$

$$T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \ldots + a_{mn}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in}v_i$$

- Assim, se $u \in U$, então $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$, donde

$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) v_i \right] = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i,$$

sendo $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j$.

- Assim, se $u \in U$, então $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$, donde

$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) v_i \right] = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i,$$

sendo $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j$.

- Assim,

$$u_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{A}} \implies [T(u)]_{\mathcal{B}} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)_{\mathcal{B}}$$

- Assim, se $u \in U$, então $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$, donde

$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) v_i \right] = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i,$$

sendo $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j$.

- Assim,

$$u_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{A}} \implies [T(u)]_{\mathcal{B}} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)_{\mathcal{B}}$$

- Note então, que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- Assim, se $u \in U$, então $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$, donde

$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) v_i \right] = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i,$$

sendo $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j$.

- Assim,

$$u_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{A}} \implies [T(u)]_{\mathcal{B}} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)_{\mathcal{B}}$$

- Note então, que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- Ou ainda

$$[T(u)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\, u_{\mathcal{A}}$$

EXEMPLOS

- Vimos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y) = (2x + y, y - x, 3x)$, tem como matriz
$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$
sendo $\mathcal{A} = \{(1, 2), (2, -1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Exemplos

- Vimos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y) = (2x + y, y - x, 3x)$, tem como matriz

$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

  sendo $\mathcal{A} = \{(1, 2), (2, -1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

- Assim, se $u = (-2, 3)_{\mathcal{A}}$, então

$$\begin{aligned} [T(u)]_{\mathcal{B}} &= [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\, u_{\mathcal{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 23 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Exemplos

- Vimos que a transformação linear $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ dada por $D(p) = p'$ tem como matriz

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

EXEMPLOS

- Vimos que a transformação linear $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ dada por $D(p) = p'$ tem como matriz

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

- Assim, se $u = (-2, 0, 1, 4)_{\mathcal{A}}$, então

$$\begin{aligned} [T(u)]_{\mathcal{A}} &= [T]_{\mathcal{A}}\, u_{\mathcal{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

PROPRIEDADES

PROPRIEDADES

TEOREMA

Sejam U e V espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T, S : U \to V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale que

$$[\lambda T + \mu S]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda[T]_{\mathcal{A},\mathcal{A}} + \mu[S]_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$$

Propriedades

Teorema

Sejam U e V espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T, S : U \to V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale que

$$[\lambda T + \mu S]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda[T]_{\mathcal{A},\mathcal{A}} + \mu[S]_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$$

Teorema

Sejam U, V e W espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T : U \to V$ e $S : V \to W$ vale que

$$[T \circ S]_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

Propriedades

Teorema

Sejam U e V espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T, S : U \to V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale que

$$[\lambda T + \mu S]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda[T]_{\mathcal{A},\mathcal{A}} + \mu[S]_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$$

Teorema

Sejam U, V e W espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T : U \to V$ e $S : V \to W$ vale que

$$[T \circ S]_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

Teorema

Sejam U e V espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear inversível, então

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [T]^{-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

O espaço $\mathcal{L}(U, V)$

O ESPAÇO $\mathcal{L}(U, V)$

DEFINIÇÃO

Sejam U e V espaços vetoriais. Denotamos por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$. Além disso, munimos $\mathcal{L}(U, V)$ com as seguintes operações:

$$(T + S) : U \to V,\ (T + S)(u) = T(u) + S(u)$$

e

$$(\lambda T) : U \to V,\ (\lambda T)(u) = \lambda T(u).$$

O ESPAÇO $\mathcal{L}(U,V)$

DEFINIÇÃO

Sejam U e V espaços vetoriais. Denotamos por $\mathcal{L}(U,V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$. Além disso, munimos $\mathcal{L}(U,V)$ com as seguintes operações:

$$(T+S) : U \to V, \ (T+S)(u) = T(u) + S(u)$$

e

$$(\lambda T) : U \to V, \ (\lambda T)(u) = \lambda T(u).$$

TEOREMA

O conjunto $\mathcal{L}(U,V)$ é um espaço vetorial. Além disso, se U e V possuem dimensão finita, então fixadas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ bases de U e V, então a aplicação

$$\Psi : \mathcal{L}(U,V) \to \mathbb{M}_{m\times n}, \ \text{ dada por } T \mapsto [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

é bijetiva.