# CMI 022
# Álgebra Linear
# S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

# 12 de Dezembro

Aula de hoje: O teorema núcleo-imagem

Referências:


- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

## Transformação linear

### Definição

Sejam $U$ e $V$ dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se valem as seguintes propriedades:

(a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in U$.

(b) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

### Definição

Sejam $U$ e $V$ espaços vetoriais. Denotamos por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$. Além disso, munimos $\mathcal{L}(U, V)$ com as seguintes operações:

$$(T+S) : U \to V,\ (T+S)(u) = T(u) + S(u)$$

e

$$(\lambda T) : U \to V,\ (\lambda T)(u) = \lambda T(u).$$

# Matrizes de transformações lineares

Sejam $U$ e $V$ dois espaços vetoriais de dimensão finita, $T : U \to V$ uma transformação linear. Dadas $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $U$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de $V$, a matriz **da transformação** $T$, com respeito a estas bases, é a matriz

$$[T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Assim,

$$u_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{A}} \implies [T(u)]_{\mathcal{B}} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)_{\mathcal{B}}$$

- Note então, que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- Ou ainda

$$[T(u)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\, u_{\mathcal{A}}$$

## Propriedades

### Teorema

Sejam $U$ e $V$ espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T, S : U \to V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale que

$$[\lambda T + \mu S]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} + \mu [S]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

### Teorema

Sejam $U$, $V$ e $W$ espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Dadas duas transformações lineares $T : U \to V$ e $S : V \to W$ vale que

$$[S \circ T]_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

### Teorema

Sejam $U$ e $V$ espaços de dimensão finita com bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear inversível, então

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [T]^{-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

# Núcleo e imagem

## Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

## Núcleo e imagem

### Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

- Se $X \subset U$, definimos a imagem de $X$ por $T$ como sendo o conjunto

$$T(X) = \{T(x),\ x \in U\} \subset V.$$

# Núcleo e imagem

## Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

- Se $X \subset U$, definimos a imagem de $X$ por $T$ como sendo o conjunto

$$T(X) = \{T(x),\ x \in U\} \subset V.$$

- A imagem de $T$ é o conjunto $T(U)$ e utilizaremos a notação $Im(T)$.

## Núcleo e imagem

### Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

- Se $X \subset U$, definimos a imagem de $X$ por $T$ como sendo o conjunto

$$T(X) = \{T(x),\ x \in U\} \subset V.$$

- A imagem de $T$ é o conjunto $T(U)$ e utilizaremos a notação $Im(T)$.
- Se $Y \subset V$, definimos a imagem inversa de $Y$ por $T$ como sendo o conjunto

$$T^{-1}(Y) = \{x \in U;\ T(x) \in Y\} \subset V.$$

## Núcleo e imagem

### Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

- Se $X \subset U$, definimos a imagem de $X$ por $T$ como sendo o conjunto

$$T(X) = \{T(x),\ x \in U\} \subset V.$$

- A imagem de $T$ é o conjunto $T(U)$ e utilizaremos a notação $Im(T)$.
- Se $Y \subset V$, definimos a imagem inversa de $Y$ por $T$ como sendo o conjunto

$$T^{-1}(Y) = \{x \in U;\ T(x) \in Y\} \subset V.$$

- A imagem inversa de $T$ é o conjunto $T^{-1}(V)$.

# Núcleo e imagem

### Proposição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

(a) Se $W$ é um subespaço de $U$, então $T(W)$ é um subespaço de $V$.

(b) O conjunto $T^{-1}(\{0\})$ é um subespaço de $U$.

## Núcleo e imagem

### Proposição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

(a) Se $W$ é um subespaço de $U$, então $T(W)$ é um subespaço de $V$.

(b) O conjunto $T^{-1}(\{0\})$ é um subespaço de $U$.

### Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. O subespaço $T^{-1}(\{0\})$ é dito núcleo de $T$ e utilizaremos a notação

$$\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{0\}).$$

## Núcleo e imagem

### Proposição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

(a) Se $W$ é um subespaço de $U$, então $T(W)$ é um subespaço de $V$.

(b) O conjunto $T^{-1}(\{0\})$ é um subespaço de $U$.

### Definição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. O subespaço $T^{-1}(\{0\})$ é dito núcleo de $T$ e utilizaremos a notação

$$\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{0\}).$$

### Proposição

Uma transformação linear $T : U \to V$ é injetora se, e somente se,

$$\mathcal{N}(T) = \{0\}.$$

## Exemplo

Considere $\theta \in \mathbb{R}$ fixado e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

Neste caso, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0)\}$.

## Exemplo

Sejam $A_{m,n}$ uma matriz e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$T(x) = A \cdot x.$$

Neste caso, $\mathcal{N}(T)$ coincide com o espaço das soluções do sistema linear $Ax = 0$.

## Exemplo

Considere $\theta \in \mathbb{R}$ fixado e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

Neste caso, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

## Exemplo

Sejam $A_{m,n}$ uma matriz e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$T(x) = A \cdot x.$$

Neste caso, $\mathcal{N}(T)$ coincide com o espaço das soluções do sistema linear $Ax = 0$.

## Exemplo

Considere a transformação linear $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ dada por

$$D(p) = p'$$

Neste caso, $\mathcal{N}(T)$ coincide com o espaço dos polinômios de grau zero (funções constantes.).

## O teorema Núcleo-Imagem

# O teorema Núcleo-Imagem

### Teorema

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $U$ tem dimensão finita, então

$$dim(U) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T))$$

## O teorema Núcleo-Imagem

### Teorema

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $U$ tem dimensão finita, então

$$dim(U) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T))$$

### Corolário

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e suponha que $U$ e $V$ são espaços com dimensão finita, com $dim(U) = dim(V)$. Nestas condições, são equivalentes as seguintes afirmações

(a) $T$ é sobrejetiva.

(b) $T$ é injetiva.

(c) $T$ é bijetiva.

(d) $T$ leva bases de $U$ em bases de $V$.