CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Enumerabilidade

Nesta seção estudaremos[1] os conjuntos enumeráveis e algumas de suas principais propriedades. As principais referências são [3, 4, 8].

Como motivação ao que vai ser estudado aqui, considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. & \end{cases} \tag{1}$$

Note que tal função é bijetiva, logo cada número inteiro está unicamente relacionado a um número natural via tal função. Isso, em particular, nos diz que a "quantidade" de número inteiros não excede a "quantidade" de números naturais. Mais do que isso, essa "quantidade" deve ser a mesma. Nesta seção iremos formalizar e generalizar esse fenômeno.

Comecemos com a seguinte definição:

Definição 1.1 *Dados dois conjuntos A e B iremos dizer escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.*

Observação 1.1 *Note que:*

- *$A \sim A$, sempre que A é não vazio, pois a função $I : A \to A$ definida por $I(x) = x$ é bijetiva;*
- *se $A \sim B$, então $B \sim A$. De fato, se $f : A \to B$ é bijetiva, então $f^{-1} : B \to A$ também é biejtiva.*
- *se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$. Com efeito, sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas bijeções. Nestas condições, a composta $g \circ f : A \to C$ é uma bijeção.*

Tendo em mente a definição e a observação acima introduzimos o seguinte:

Definição 1.2 *Com respeito a um conjunto A temos as seguintes definições:*

a) A é finito se $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, sendo $I_n = \{1, \ldots, n\}$. (O Conjunto vazio é naturalmente considerado finito);

b) A é infinito se não é finito;

*c) A é **enumerável** se $A \sim \mathbb{N}$;*

*d) A é **não-enumerável** se não é enumerável e nem finito.*

Exercício 1.1 .

- *$\mathbb{N}$ é enumerável.*
- *Segue de (1) que $\mathbb{Z}$ é enumerável.*
- *O conjunto $\mathbb{P}$ dos número naturais pares é enumerável.*

[1] Ao longo desta seção iremos considerar as noções intuitivas dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

- *Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável. De fato, se X é infinito então já foi visto que existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Assim, definindo $Y = f(\mathbb{N})$ temos que $f : \mathbb{N} \to Y$ é bijetiva.*

Observação 1.2 *Note que se A é um conjunto enumerável, então podemos escrever A como uma lista, isto é,*

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

De fato, seja $A \sim \mathbb{N}$. Tomando uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ vale a igualdade

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\},$$

logo basta definir $x_n = f(n)$.

Observação 1.3 *É muito importante tomar cuidado com as nomenclaturas nas referências. Alguns autores dizemos que um conjunto A é enumerável se é finito ou se $A \sim \mathbb{N}$. Este é o caso dos livros do Elon. O termo "contável" também pode ser encontrado na literatura. Por exemplo, nas notas de aula do Prof. Higidio, um conjunto é dito contável se é finito ou enumerável.*

Teorema 1.1 *Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: De fato, considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$\begin{aligned} f(1) &= min(X) \\ f(2) &= min(X \setminus \{f(1)\}) \\ f(3) &= min(X \setminus \{f(1), f(2)\}) \end{aligned}$$

sendo que $min(*)$ indica o menor elemento do conjunto *. Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

$$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

Tal função assim definida é injetiva (Verifique!). Além disso, podemos verificar(Verifique!) por indução que

$$n \leq f(n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afiramos que dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$. De fato, suponha por absurdo que $k \notin \{f(1), \ldots, f(k)\}$. Isso significa que $k \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

Segue da definição de f que $f(k+1) \leq k$. Como $k+1 \leq f(k+1)$, obtemos

$$k+1 \leq f(k+1) \leq k,$$

donde $k+1 \leq k$, o que é um absurdo.

Assim, dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$, logo f é sobrejetiva e portanto bijetiva. Isso mostra que X é enumerável.

■

Teorema 1.2 *Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.*

Demonstração: De fato, considere uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$ e seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$. Note que a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é uma bijeção. Como B é infinito, então Y é infinito e portanto enumerável. Assim, existe uma bijeção $g : Y \to \mathbb{N}$. Note então que $g \circ F$ é uma bijeção de B sobre $\mathbb{N}$, logo $B \sim \mathbb{N}$ e portanto B é enumerável.

■

Proposição 1.1 *Considerando uma função $f : X \to Y$, sendo X e Y conjuntos infinitos. Prove quee:*

(a) Se Y é enumerável e f injetiva, então X é enumerável;

(b) Se X é enumerável e f sobrejetiva, então Y é enumerável;

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 1.3 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.*

Demonstração: Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$. Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos. Uma vez que $\mathbb{N}$ é enumerável, então obtemos da Proposição 1.1 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Considere agora X, Y dois conjuntos enumeráveis e sejam $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ duas bijeções. Defina então a função $j : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ pondo

$$j(n, m) = (f(n), g(m)).$$

Uma vez que j é uma função sobrejetiva, então obtemos da Proposição 1.1 que $X \times Y$ é enumerável.

■

Observação 1.4 *O resultado acima continua válido para o cartesiano de* ***finitos*** *conjuntos enumeráveis, mas não vale para o cartesianos de infinitos conjuntos enumeráveis.*

Exemplo 1.1 *O conjunto dos números racionais é enumerável. De fato, temos que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por*

$$f(m, n) = \frac{m}{n}$$

é sobrejetiva.

Teorema 1.4 *Seja $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos enumeráveis. Nestas condições, temos que*

$$X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$$

é enumerável.

Demonstração: Exercício. Dicas:

- para cada $n \in \mathbb{N}$, considere uma bijeção $f_n : \mathbb{N} \to A_n$;
- Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ pondo $f(m,n) = f_m(n)$.

$\blacksquare$

1.1 $\mathbb{N}$ é menor conjunto infinito

Apresentaremos nesta seção um argumento devido a Cantor que exibe exemplos de conjuntos que não são enumeráveis. Em especial, veremos que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Para tanto, considere a seguinte definição: *dizemos que dois conjuntos X e Y tem o mesmo número cardinal se $X \sim Y$, isto é, existe uma bijeção de X sobre Y. Neste caso, escrevemos*
$$card(X) = card(Y).$$

Note que se X e Y são finitos, então está definição coincide com o que já foi estudado. Quando X é infinito e enumerável, então

$$card(X) = card(\mathbb{N}).$$

Por outro lado, definimos o seguinte: *dizemos que $card(X) < card(Y)$ quando existe uma função injetiva $f : X \to Y$, mas não existe uma bijeção de X sobre Y.*

Note então que do Teorema 1.2 temos que

$$card(\mathbb{N}) \leq card(X), \text{ para qualquer conjunto infinito } X.$$

Neste sentido é possível dizer que "$\mathbb{N}$ é o menor conjunto infinito".

Veremos na sequência que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Um fato interessante é o seguinte: não existe nenhum conjunto infinito X tal que

$$card(\mathbb{N}) < card(X) < card(\mathbb{R}.)$$

Essa afirmação é conhecida[2] como *hipótese do contínuo.*

1.2 Conjuntos não-enumeráveis e a Diagonal de Cantor

Apresentamos nesta seção alguns conjuntos não-enumeráveis. O primeiro deles é o intervalo $I = (0,1)$, ou seja, o conjunto

$$x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1.$$

Para tanto, assuma que I é enumerável, logo podemos escrever $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ como descrito na Observação 1.2.

[2]Diversas referências podem ser encontradas na internet! A Wikipedia apresenta uma visão geral do assunto, bem como a história deste problema.

Para cada um destes elementos x_n escrevamos sua representação decimal:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5}, \ldots \\
x_2 &= 0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}a_{2,5}, \ldots \\
x_3 &= 0, a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}a_{3,5}, \ldots \\
x_4 &= 0, a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}a_{4,5}, \ldots \\
x_5 &= 0, a_{5,1}a_{5,2}a_{5,3}a_{5,4}a_{5,5}, \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}a_{n,5}, \ldots \\
&\vdots,
\end{aligned}$$

sendo que $a_{j,k} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Feito isso iremos construir um elemento $y \in (0, 1)$ que não pertence $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, ou seja, I não pode ser enumerável. Para tanto defina

$$y = 0, s_1 s_2 s_3 s_4 s_5, \ldots$$

de tal forma que $s_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
s_1 &\neq a_{1,1} \\
s_2 &\neq a_{2,2} \\
s_3 &\neq a_{3,3} \\
s_4 &\neq a_{4,4} \\
&\vdots \\
s_n &\neq a_{n,n} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note então que $y \neq x_1$, pois $s_1 \neq a_{1,1}$. Temos também $y \neq x_2$, pois $s_2 \neq a_{2,2}$. Então, de modo geral, temos sempre $y \neq x_n$, pois $s_n \neq a_{n,n}$. Isso mostra que $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Teorema 1.5 *O conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável.*

Demonstração: Note que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito e que $I \subset \mathbb{R}$. Segue do Teorema 1.2 que $\mathbb{R}$ é não enumerável. ■

Observação 1.5 *O processo de construção apresentado acima pe conhecido como Diagonal de Cantor.*

Teorema 1.6 *O conjunto $X = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}$ é não enumerável.*

Demonstração: Exercício. Dicas:

- Os elementos de X podem ser visto como um vetor infinito

  $$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots),$$

  com $a_j \in \mathbb{N}$.

- Suponha X enumerável e utilize a Diagonal de Cantor.

■

1.3 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.2 *Suponha que existam duas funções injetivas* $f : \mathbb{N} \to X$ *e* $g : X \to \mathbb{N}$*. Mostre que* X *é enumerável.*

Exercício 1.3 *Suponha que* $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *uma família de conjuntos enumeráveis. Mostre que o conjunto*

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$$

é enumerável. Dicas:

- *para cada* m *existe bijeção* $\varphi_m : \mathbb{N} \to A_m$*;*
- *defina* $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ *pondo* $\beta(m, n) = \varphi_m(n)$*;*
- *mostre que* β *é sobrejetiva;*

Exercício 1.4 *Demonstre a Proposição 1.1.*

Exercício 1.5 *Demonstre o Teorema 1.4.*

Exercício 1.6 *O conjunto dos números irracionais é enumerável?*

Exercício 1.7 *Considere* X *o conjunto de todas as listas infinitas de zeros e uns, isto é,* X *é o conjunto dos vetores infinitos cujas coordenadas são zeros ou uns. Por exemplo,*

$$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots) \in X.$$

Mostre que X *não é enumerável.*

Exercício 1.8 *Um número real* x *é dito algébrico se existem inteiros* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*, não todos nulos, tais que*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Denote por $\mathcal{A}$ *o conjunto dos números algébricos. Mostre que* $\mathcal{A}$ *é enumerável.*

Dicas:

(1) Considere o conjunto $P^n(\mathbb{Z})$ *dos polinômios de grau* $\leqslant n$*, com coeficientes inteiros;*

(2) Construa uma bijeção $\mathbb{Z}^{n+1} \to P^n(\mathbb{Z})$*;*

(3) Conclua que o conjunto $P(\mathbb{Z})$ *dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável.*

(4) Dado um elemento $f \in P(\mathbb{Z})$*, associe* f *ao conjunto* R_f *formado por todas as suas raízes.*

(5) $\mathcal{A} = \bigcup_{f\in P(\mathbb{Z})} R_f$

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.