CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Gráficos de funções

Iniciaremos neste capítulo um estudo sobre gráficos de funções reais a valores reais, isto é, funções do tipo
$$f : A \to \mathbb{R},$$
sendo $A \subset \mathbb{R}$. Neste ponto relembramos que o gráfico de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\; x \in A \text{ e } y = f(x)\}.$$

Note então que $Gr(f)$ é um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e que vale a igualdade

$$Gr(f) = \{(x, f(x));\; x \in A\}.$$

Observação 1.1 *É importante observar que nem todo subconjunto de pontos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o gráfico de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como, por exemplo, o conjunto*

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Relembramos aqui as seguintes definições:

Definição 1.1 *Dada uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem-se:*

a) o conjunto imagem de f é definido por

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\; y = f(x),\; \textit{para algum } x \in A\};$$

b) f é dita injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$;

c) f é dita sobrejetiva se $Im(f) = \mathbb{R}$, o seja, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;

d) f é dita bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.

Observação 1.2 *Observamos que várias vezes poderemos considerar funções $f : A \to B$, sendo $A, B \subset \mathbb{R}$, ou seja, neste caso o contra-domínio de f passa a ser o conjunto B. Neste caso f será sobrejetiva se para todo $y \in B$ existir $x \in A$ tal que $y = f(x)$.*

Exercício 1.1 *Classifique as funções seguintes com respeito a injetividade e sobrejetividade.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$;

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$;

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$;

(d) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$;

(e) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$;

(f) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$;

1.1 Interseção de gráficos

Uma parte importante no nosso estudo será a interseção de gráficos. Para tanto, considere duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ e seus respectivos gráficos $Gr(f)$ e $Gr(g)$. Assim, podemos estudar o conjunto

$$X = Gr(f) \cap Gr(g),$$

Observe então que temos duas possibilidades:

$$X = \emptyset, \quad \text{ou} \quad X \neq \emptyset.$$

Para fixar as ideias, considere o seguinte exemplo:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_1 x + b_1$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = a_2 x + b_2$,

sendo $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ fixados. Temos então

$$Gr(f) = \{(x, a_1 x + b_1);\ x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad Gr(g) = \{(x, a_2 x + b_2);\ x \in \mathbb{R}\},$$

de modo que $X \neq \emptyset$ se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in Gr(f) \cap Gr(g)$ o que equivale a termos $y = f(x)$ e $y = g(x)$, ou seja, $a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$ implicando em

$$(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1. \tag{1}$$

Temos dois casos para analisar: $a_1 = a_2$ e $a_1 \neq a_2$. No primeiro caso, $a_1 = a_2$ temos que a equação (1) só tem solução se $b_2 = b_1$. Neste caso, teremos $f \equiv g$, de modo que $Gr(f) = Gr(g)$. Se for $b_2 \neq b_1$, então $X = \emptyset$.

Por outro lado, se $a_1 \neq a_2$, então temos

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2},$$

ou seja, para $a_1 \neq a_2$, existe único $(x, y) \in Gr(f) \cap Gr(g)$ dado por

$$\left(\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2} \right)$$

Observação 1.3 *Observe que estudar o conjunto $Gr(f) \cap Gr(g)$ no último exemplo é equivalente ao estudo do sistema linear*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 = y, \\ a_2 x + b_2 = y. \end{cases}$$

1.2 Inequações do ponto de vista gráfico

Para iniciarmos esta seção, considere a seguinte definição: dados dois pontos (a, b) e (c, d) pertencentes a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ escrevemos

$$(a, b) = (c, d), \quad \text{se} \quad a = c \text{ e } b = d.$$

Por outro lado, para dois pontos (a, b) e (a, d) escreveremos:

- $(a,b) < (a,d)$ se $b < d$;
- $(a,b) > (a,d)$ se $b > d$.

Considere agora $f, g : A \to \mathbb{R}$ duas funções e considere os conjuntos

$$\begin{aligned}\mathscr{X} &= \{x \in A;\ f(x) < g(x)\},\\ \mathscr{Y} &= \{x \in A;\ f(x) = g(x)\},\\ \mathscr{Z} &= \{x \in A;\ f(x) > g(x)\}.\end{aligned}$$

Note então que:

- se $x \in \mathscr{X}$, então $(x, f(x)) < (x, g(x))$;
- se $x \in \mathscr{Y}$, então $(x, f(x)) = (x, g(x))$;
- se $x \in \mathscr{Z}$, então $(x, f(x)) > (x, g(x))$.

Exemplo 1.1 *Para ilustrar estas definições considere novamente $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$f(x) = a_1 x + b_1 \quad e \quad g(x) = a_2 x + b_2,$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ fixados. Neste caso temos:

- *$x \in \mathscr{X}$ se, e somente se, $(a_1 - a_2)x < b_2 - b_1$;*
- *$x \in \mathscr{Y}$ se, e somente se, $(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1$;*
- *$x \in \mathscr{Z}$ se, e somente se, $(a_1 - a_2)x > b_2 - b_1$.*

Exercício 1.2 *Faça um estudo dos casos acima analisando as possibilidades $a_1 = a_2$, $a_1 < a_2$ e $a_1 > a_2$.*

1.3 Decrescimento e crescimento

Nessa seção estudaremos em linhas gerais funções crescentes e decrescente. Para tanto iremos restringir nosso estudo para funções $f : I \to \mathbb{R}$ para as quais $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

Definição 1.2 *Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:*

a) crescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;

b) decrescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;

c) constante se $f(x_1) = f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in I$.

Observação 1.4 *É importante observar que uma função pode apresentar os comportamentos crescente e decrescente como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Por outro lado, uma função pode não apresentar nenhum deste comportamento como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercício 1.3 *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Sob quais condições temos:*

a) f constante *b) f crescente* *c) f decrescente.*

1.4 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.4 *Seja $f : A \to [-9, -1[$ dada por $f(x) = \dfrac{3 + 4x}{3 - x}$. Pede-se:*

(a) Determinar A;

(b) Mostrar que f é injetora;

(c) Verificar se f é sobrejetora.

Exercício 1.5 *Seja $f : A \to]1, 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4 - 11x}{4 - 2x}$. Pede-se:*

(a) Determinar A;

(b) Mostrar que f é injetora;

(c) Verificar se f é sobrejetora.

Exercício 1.6 *Classifique as funções seguintes com respeito a injetividade e sobrejetividade.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$;

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$;

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$;

(d) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$;

(e) $p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$);

(f) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$;

(g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$;

Exercício 1.7 *Determine o menor valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.*

Exercício 1.8 *Considere $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto que satisfaz a seguinte propriedade: se $a \in A$, então $-a \in A$. Neste caso, uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita* par *se $f(-a) = f(a)$ para todo $a \in A$ e é dita* ímpar *se $f(-a) = -f(a)$, para todo $a \in A$. Determine em cada alternativa abaixo se f é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.*

(a) $f(x) = 3x^3 - 4x$;

(b) $f(x) = 9 - 5x^2$;

(c) $f(x) = -2$;

(d) $f(x) = 2x^3 + x^2$;

(e) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$;

(f) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$;

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$;

(i) $f(x) = |x| + 5$;

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

(k) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

Exercício 1.9 *Considere $a \in \mathbb{R}$ fixado e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = ax$.*

a) *Mostre que $f(x) + f(1 - x) = f(1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

b) *Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, mostre que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.*

Exercício 1.10 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita aditiva se $\mathbb{R}$ se $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.*

(a) *Dê um exemplo de função aditiva.;*

(b) *Dê um exemplo de função não-aditiva.;*

(c) *Mostre que se f é uma função aditiva, então $f(0) = 0$.;*

(d) *Mostre que uma função aditiva deve satisfazer a $f(-x) = -f(x)$;*

2 Função afim

Neste capítulo estudaremos funções do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = ax + b, \tag{2}$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$. Uma função do tipo (2) será dita *função afim*.

Observação 2.1 *Por vezes poderemos considerar funções do tipo* (2) *definidas sobre conjuntos* $A \subset \mathbb{R}$. *Continuaremos utilizando o termo função afim nestes casos.*

Teorema 2.1 *Sejam* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *dois pontos em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *tais que* $x_1 \neq x_2$. *Nestas condições, existe uma única função afim* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x_1) = y_1 \quad e \quad f(x_2) = y_2.$$

Demonstração: De fato, basta exibirmos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Devemos então obter números a e b que sejam solução do sistema linear

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1, \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

o qual possui única solução

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

■

Nosso próximo passo é estudar o "formato" do gráfico de uma função afim. Para tanto, utilizaremos o seguinte resultado de geometria analítica:

Teorema 2.2 *Sejam* $P_1 = (A_1, B_1), P_2 = (A_2, B_2)$ *e* $P_3 = (A_3, B_3)$ *três pontos quaisquer em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Estes três pontos pertencem a uma mesma reta se, e somente se, o maior dos três números*

$$d(P_1, P_2), \; d(P_2, P_3) \quad e \quad d(P_1, P_3)$$

seja igual a soma dos outros dois, sendo

$$d(P_j, P_k) = \sqrt{(A_j - A_k)^2 + (B_j - B_k)^2}.$$

Podemos então enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *O gráfico de uma função afim é uma reta.*

Demonstração: Conssidere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ uma função afim e $P_k = (x_k, f(x_k))$, k=1,2,3, três pontos pertencentes ao gráfico de f tais que $x_1 < x_2 < x_3$.

Uma vez que $f(x_k) = ax_k + b$, então

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\ d(P_2, P_3) &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}, \\ d(P_1, P_3) &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Uma conta simples mostra que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3),$$

donde segue do Teorema 2.2 que os três pontos P_1, P_2 e P_3 pertencem a uma reta. Como x_1, x_2 e x_3 são arbitrários, então o gráfico de f é uma reta.

■

Exercício 2.1 *Seja $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}$. Qual é formato do gráfico de uma função $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$? E se trocarmos A por $\mathbb{N}$? E se trocarmos A por $\mathbb{Z}$? E se trocarmos A por $\mathbb{Q}$? Aliás, qual o formato do gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercício 2.2 *Vale a volta do Teorema 2.3? Se falso, sob quais condições uma reta é o gráfico de uma função afim?*

2.1 Exercícios adicionais da seção

Exercício 2.3 *Abaixo temos funções $f : A \to \mathbb{R}$. Esboce os gráficos destas funções.*

(a) $f(x) = 3 - x$, *com* $A = \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = -10x + 5$, *com* $A = [-3, 1]$.

(c) $f(x) = x + 2$, *com* $A = \mathbb{Q}$;

(d) $f(x) = 4x - 1$, *com* $A = \mathbb{N}$.

Exercício 2.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes propriedades:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$;
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, *para todo* $x, \lambda \in \mathbb{R}$.

(Uma função satisfazendo estas propriedades é dita linear.)

Mostre que:

a) $f(0) = 0$;

b) existe $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = ax$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

c) se $y, w \in Im(f)$, *então* $y + w \in Im(f)$;

d) se $y \in Im(f)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $\lambda y \in Im(f)$.

Exercício 2.5 *Podemos retirar a hipótese $x_1 \neq x_2$ no teorema 2.1?*

Exercício 2.6 *Considere uma função afim $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$. Sejam $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ dois pontos pertencentes ao gráfico de f, com $x_1 \neq x_2$. Considere o triângulo retângulo formado pelos pontos P_1, P_2 e*

$$P_3 = (x_2, f(x_1)).$$

Denote por α ângulo formado entre os lados $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_1P_3}$.

a) Mostre que $\tan(\alpha) = a$.

b) Repita o raciocínio considerando $a < 0$.

c) Qual a relação entre o crescimento (decrescimento) de f *e os triângulos obtidos?*

Exercício 2.7 *O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um* custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de* custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R$ 10.000,00 e os custos variáveis de R$ 200,00 por hectare. Seja* C *o custo total, calculado em milhares de reais, e* x *o número de hectares plantados.*

(a) Encontre uma fórmula para C *em função de* x*;*

(b) Esboce o gráfico de C versus x*;*

(c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico;

Exercício 2.8 *Para que valores de* $x \in \mathbb{R}$ *a função* $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ *é negativa?*

Exercício 2.9 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \dfrac{3x-1}{4}$*. Para que valores do domínio a imagem é menor que* 4*?*

Exercício 2.10 *Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação. Faça este exercício utilizando a seguinte ideia: no item a) podemos pensar nas retas* $3x + y - 1 = 0$ *e* $2x + y - 1 = 0$ *como sendo os gráficos das funções afim*

$$f(x) = 1 - 3x \quad e \quad g(x) = 1 - 2x,$$

logo estamos, de acordo com a Seção 1.1, estudando o conjunto $X = Gr(f) \cap Gr(g)$*.*

(a) $3x + y - 1 = 0$ *e* $2x + y - 1 = 0$*;*

(b) $-2x + 3y - 6 = 0$ *e* $-2x + 3y + 3 = 0$*;*

(c) $-2x + 5y + 30 = 0$ *e* $5x + 2y - 2 = 0$*;*

(d) $-x + y - 2 = 0$ *e* $x + y - 2 = 0$

(e) $y - 3x = 0$ *e* $y - 3x + 1 = 0$*;*

(f) $y + x + 1 = 0$ *e* $2y + 2x + 1 = 0$*;*

3 Função poligonal

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

tais que em cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, para $x \leq t_0$ e $x \geq t_n$, a função f coincide com uma função afim f_k. Exige-se ainda que

$$f_k(t_k) = f_{k-1}(t_k - 1).$$

Exemplo 3.1 (Módulo (ou valor absoluto)) *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & se \;\; x \le 0, \\ x, & se \;\; x \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Note então que tomando $t_0 = 0$ e as funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = -x \quad e \quad h(x) = x,$$

temos que

$$f(x) = g(x), \; \forall x \le 0 \quad e \quad f(x) = h(x), \; \forall x \ge 0.$$

Observação 3.1 *A função f do exemplo anterior é também denotada por $|\cdot|$, isto é,*

$$f(x) = |x|, \; x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3.1 *Esboce o gráfico das seguintes funções $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas abaixo (dica: escreva cada uma delas como a composição entre a função módulo e uma função afim e também a expressão (3)):*

a) $f_1(x) = |x+1|$;

b) $f_2(x) = |x+2|$;

c) $f_3(x) = |x-1|$;

d) $f_4(x) = |x-2|$.

3.1 Forma canônica

3.2 Exercícios adicionais da seção

Exercício 3.2 *Abaixo temos funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esboce os gráfico de cada uma, resolva as inequações $f(x) \le g(x)$ e as estude graficamente.*

(a) $f(x) = |x-7|$ *e* $g(x) \equiv 9$.

(b) $f(x) = |2x+3|$ *e* $g(x) \equiv 10$.

(c) $f(x) = |3x-1|$ *e* $g(x) = x$.

(d) $f(x) = |x-1| + |x-3|$ *e* $g(x) = 4x$.

Exercício 3.3 *Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$f(x) = 2|x+1|, \; g(x) = -|1-x| \quad e \quad h(x) = x+2.$$

a) Esboce o gráfico de cada uma dessas funções.

b) Esboce o gráfico de $j(x) = f(x) + g(x)$.

c) Resolva a equação $j(x) = h(x)$.

d) Resolva a inequação $j(x) \le h(x)$.

e) Resolva a inequação $j(x) \ge h(x)$.

4 Função quadrática

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, defini-se por função quadrática a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Na sequência utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ três pontos distintos em $\mathbb{R}^2$. Uma condição necessária e suficiente para que este pontos sejam colineares é*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Teorema 4.1 *Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números reais tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ sejam não colineares. Nestas condições existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que*

$$f(x_1) = y_1, \; f(x_2) = y_2 \quad e \quad f(x_3) = y_3. \tag{5}$$

Demonstração: Mostremos inicialmente a existência de tal função, ou seja, iremos mostrar que existem a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ e vale (5).

Observe que isso significa resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases}$$

(Note que neste sistema as incógnitas são a, b, c).

Em via das hipóteses, é possível verificar que este sistema possui uma única solução. Além disso, temos que

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right).$$

Uma vez que A, B e C são não-colineares, então temos do Lema 4.1 que $a \neq 0$.

■

4.1 Forma canônica

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática e $x \in \mathbb{R}$ fixado. Temos então

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Suponha agora que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. Segue de (6) que

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0,$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{7}$$

Denotando por $\Delta = b^2 - 4ac$, temos que existe x real satisfazendo $f(x) = 0$ se, e somente se, $\Delta \geq 0$. Note então que se for $\Delta = 0$, então

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Por outro lado, se $\Delta > 0$, então

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}.$$

Assim, temos duas possibilidades:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}, \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|},$$

donde, considerando os casos $a > 0$ e $a < 0$, segue que

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{8}$$

Portanto, provamos o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *A equação*

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

possui solução em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\Delta \geq 0$. Além disso, se $\Delta = 0$, então temos uma única solução. Se $\Delta > 0$, então existem duas soluções distintas.

Note também que se $\Delta \neq 0$, então definindo

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

então

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Observação 4.1 *O resultado acima nos dá uma primeira informação sobre o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:*

i) quando $\Delta = 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x num único ponto, a saber, $x = -b/2a$;

ii) quando $\Delta > 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x em dois pontos distintos, a saber,

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad e \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{9}$$

iii) quando $\Delta < 0$, o gráfico de f não intercepta o eixo x.

O próximo resultado nos dará mais algumas informações.

Teorema 4.3 *Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $\Delta = 0$. Temos então:*

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a > 0$;

b) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a < 0$.

Demonstração: Segue de (6) que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

o que ocorre se, e somente se, $a > 0$. O item b) é provado de forma semelhante.

$\blacksquare$

Observação 4.2 *Note que se $\Delta \neq 0$, então tomando $x_0 = -b/2a$, então $f(x_0) = -a\Delta$. Assim, temos:*

$$a > 0 \Longrightarrow f(x_0) < 0,$$
$$a < 0 \Longrightarrow f(x_0) > 0.$$

Exercício 4.1 *Mostre que:*

(a) se $a > 0$, então $f(-b/2a) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) se $a < 0$, então $f(-b/2a) \geq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

4.2 Gráfico da função quadrática

Neste capítulo veremos que o gráfico de uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma parábola. Para tanto, relembremos a seguinte definição:

Definição 4.1 *Seja P uma parábola com eixo de simetria vertical, vértice $V = (h, k)$, com foco $F = (s, t)$ e distância entre V e F igual a d. Nestas condições um ponto (x, y) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertence a P se, e somente se,*

$$(x - h)^2 - 4d(y - k) = 0. \tag{10}$$

Teorema 4.4 *O gráfico de uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, é uma parábola de foco*

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$$

e vértice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Demonstração: De fato, note que $d = 1/4a$. Temos então que

$$(x + b/2a)^2 - 4\frac{1}{4a}\left(f(x) + \frac{\Delta}{4a}\right) = 0,$$

ou seja, $(x, f(x))$ pertence a parábola.

$\blacksquare$

Exercício 4.2 *Mostre que se $a < 0$, então o gráfico de f também é uma parábola.*

4.3 Exercícios adicionais da seção

Exercício 4.3 *Determine o menor valor de* b *em* $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq b\}$ *de modo que a função* $f : \mathbb{R} \to B$ *definida por* $f(x) = x^2 - 4x + 6$ *seja sobrejetora.*

Exercício 4.4 *Fixados dois números reais* p *e* s*, determine dois números reais cuja soma é* s *e o produto é* p*.*

Exercício 4.5 *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *e* $g(x) = x + \alpha$*. Defina também* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pondo*

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(x + \alpha).$$

a) *Suponha* $a = 1$*,* $b = -1$*,* $c = 0$*. Esboce o gráfico de* h *nos casos* $\alpha = 0$*,* $\alpha = 1$ *e* $\alpha = -1$*.*

a) *De modo geral, qual é a diferença entre os gráficos de* f *e de* h*?*

Exercício 4.6 *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *e* $g(x) \equiv \alpha$*. Defina também* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pondo*

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(x) + g(x).$$

a) *Suponha* $a = 1$*,* $b = -1$*,* $c = 0$*. Esboce o gráfico de* h *nos casos* $\alpha = 0$*,* $\alpha = 1$ *e* $\alpha = -1$*.*

a) *De modo geral, qual é a diferença entre os gráficos de* f *e de* h*?*

Exercício 4.7 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$*.*

a) *Suponha* $a = 1$ *e* $c = 1$*. Esboce o gráfico de* f *nos casos* $b = 0$*,* $b = 1$ *e* $b = -1$*.*

a) *De modo geral, fixados* a *e* c *qual é a diferença entre os gráficos quando variamos os valores de* b*?*

Exercício 4.8 *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = x^2 - x$ *e* $g(x) = 2x + k$*, sendo* k *fixado. Determine* k *de modo que o gráfico de* g *seja tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(2, 2)$*.*

Exercício 4.9 *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *e* $g(x) = 2ax + k$*, sendo* k *fixado. Determine* k *de modo que o gráfico de* g *seja tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(x_0, f(x_0))$*.*

Exercício 4.10 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = ax^2$*.*

a) *Esboce o gráfico de* f *nos casos* $a = 1$*,* $a = 2$ *e* $a = 3$*.*

a) *Nos três casos acima, esboce o gráfico da reta tangente aos gráficos nos pontos* $(1, 1)$*,* $(2, 2)$ *e* $(3, 3)$*.*

Exercício 4.11 *Prove as* relações de Girard *para equações do segundo grau: se* $ax^2 + bx + c = 0$ *possui raízes* x_1 *e* x_2*, então*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad e \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Exercício 4.12 *Considere a função quadrática* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *tal que* $\Delta > 0$ *e sejam* $x_1 < x_2$ *suas raízes.*

a) Mostre que se $a > 0$ *e* $x_1 < x < x_2$*, então* $f(x) < 0$.

b) Mostre que se $a < 0$ *e* $x_1 < x < x_2$*, então* $f(x) > 0$.

Exercício 4.13 *Determinar os valores de* m *para que a função* $f(x) = mx^2 + (m+1)x + (m+1)$ *tenha um zero real duplo.*

Exercício 4.14 *Determine* m *na função* $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ *de modo que se tenha* $Im(f) = [2, +\infty[$.

Exercício 4.15 *Obtenha as soluções dos sistemas abaixo:*

$$(a) \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} x^2 + x + 8 < 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.16 *Resolva as seguintes equações.*

(a) $x^2 - |x| - 2 = 0$;

(b) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$;

(c) $2x^2 - |5x - 2| = 0$;

(d) $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$;

(e) $|x^2 - 1| = x + 3$;

(f) $|x^2 - 1| = |x + 3|$;

Exercício 4.17 *Obtenha os pontos de máximo das funções abaixo nos intervalos indicados*

(a) $f(x) = 3x^2 - x + 5$ *no intervalo* $[1, 2]$;

(b) $f(x) = -4x^2 + 5x - 8$ *no intervalo* $[2, 3]$;

(c) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ *no intervalo* $[-1, 2]$;

(d) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$ *no intervalo* $[0, 4]$;

Exercício 4.18 *Um arame de comprimento* ℓ *deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que a soma das áreas das figuras seja a menor possível?*

Exercício 4.19 *Dentre todos os números reais* x *e* z *tais que* $2x + z = 8$ *determine aqueles cujo produto é máximo.*

Exercício 4.20 *Dentre todos os números de soma* 6*, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.*

Exercício 4.21 *Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e o vértice que está fora dos eixos pertencente à reta* $y = -4x + 5$.

Exercício 4.22 *Determine o maior valor de* a *em* $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$ *de modo que a função* $f : A \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ *seja injetora.*

5 Função polinomial

Dizemos que uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando *de grau* n existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ such that $a_n \neq 0$ and

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{11}$$

Considere então p um polinômio de grau n e seja α um número real qualquer. Segue de (11) que

$$\begin{aligned} p(x) - p(\alpha) &= a_n (x-\alpha)^n + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + a_1(x-\alpha) \\ &= (x-\alpha) q(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo q um polinômio de grau $n-1$.

Em particular, se α é uma raiz de p, isto é, $p(\alpha) = 0$, então

$$p(x) = (x-\alpha) q(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes de p, então podemos escrever

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k) h(x),$$

sendo h um polinômio de grau $n-k$.

Note então que provamos o seguinte:

Teorema 5.1 *Uma função polinomial p de grau $n \geq 1$ tem no máximo n raízes.*

Observação 5.1 *Uma função polinomial p é dita identicamente nula quando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos necessariamente que todos os coeficientes de p são iguais a zero.*

Observação 5.2 *Suponha p e q dois polinômios satisfazendo $p(x) = q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Escrevendo*

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \quad e \quad q(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$$

segue que

$$h(x) = p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

logo h é identicamente zero e portanto

$$a_n = b_n, \ldots, a_0 = b_0.$$

Teorema 5.2 *Considere $n+1$ números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Fixados $y_0, y_1, \ldots, y_n$ existe um e somente um polinômio degrau $\leq n$ tal que*

$$p(x_0) = y_0, \ p(x_1) = y_1, \ \ldots, p(x_n) = y_n.$$

Uma forma bem interessante de provar a *existência* aponta por este teorema é através da *fórmula de interpolação de Lagrange*, isto é,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left[\prod_{0 \leq k \neq i \leq n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right]. \tag{12}$$

- Por exemplo, para $n = 1$ temos

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{1} y_i \left[\prod_{0\le k\ne i\le 1} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right] \\ &= y_0 \left[\prod_{0\le k\ne 0\le 1} \left(\frac{x - x_k}{x_0 - x_k} \right) \right] + y_1 \left[\prod_{0\le k\ne 1\le 1} \left(\frac{x - x_k}{x_1 - x_k} \right) \right] \\ &= y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) + y_1 \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \end{aligned}$$

- Por exemplo, para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{2} y_i \left[\prod_{0\le k\ne i\le 2} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right] \\ &= y_0 \left[\prod_{0\le k\ne 0\le 2} \left(\frac{x - x_k}{x_0 - x_k} \right) \right] + y_1 \left[\prod_{0\le k\ne 1\le 2} \left(\frac{x - x_k}{x_1 - x_k} \right) \right] + y_2 \left[\prod_{0\le k\ne 2\le 2} \left(\frac{x - x_k}{x_2 - x_k} \right) \right] \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Exercício 5.1 *Utilize o* (12) *para obter o polinômio de grau* ≤ 4 *que passe pelos pontos*

$$(-1, -7), (0, 1), (1, 5), (2, 11) \quad e \quad (3, 25).$$

Teorema 5.3 *Considere p um polinômio de grau n.*

a) se n é ímpar, então $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos e muito grandes de x. Por outro lado, tem o sinal oposto de a para valores negativos muito grandes de x.

b) se n é par, então $p(x)$ tem o mesmo sinal que a_n ára valores muito grandes de $|x|$.

Demonstração: Exercício. ■

5.1 Raízes

Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ defina

$$g(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1 \tag{13}$$

Suponha que p possua uma raíz α e seja s_1 um número real *próximo* desta raíz. O método de Newton diz que a sequência numérica

$$s_{n+1} = s_n - \frac{p(s_n)}{g(s_n)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tem como limite a raíz α.

5.2 Exercícios adicionais da seção

Exercício 5.2 *Considere os polinômios Se* $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2+x^4$ *e* $h(x) = x^2+x^4+x^6$ *e* $k(x) = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$, *todos definidos em* $\mathbb{R}$. *Encontre números reais* a, b *e* c *tais que* $k = af + bg + ch$.

Exercício 5.3 *Em cada caso, determine (caso exista) um polinômio do segundo grau* $f(x)$ *de modo que:*

(a) $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ *e* $f(-1) = 0$;

(b) $f(1) = 0$ *e* $f(x) = f(x-1)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

Exercício 5.4 *Esboce o gráfico dos seguintes polinômios:*

(a) $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$;

(b) $f(x) = 5(x^2-4)(x^2-25)$;

(c) $f(x) = -5(x^2-4)(25-x^2)$;

(d) $f(x) = 5(x-4)^2(x^2-25)$;

Exercício 5.5 *Em cada caso, encontre um polinômio com coeficientes inteiros cujas raízes sejam:*

(a) $\sqrt{2}+1$ *e* $\sqrt{2}-1$; *(b)* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; *(c)* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

Exercício 5.6 *Encontre todas as raízes racionais dos seguintes polinômios*

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$;

(b) $f(x) = x^3 + 8$;

(c) $f(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{6}$;

(d) $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2$;

Exercício 5.7 *Considere* $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = x^4$ *e* $g(x) = 4^x$. *Pede-se:*

(a) Faça um esboço do gráfico das duas funções num mesmo sistema de coordenadas.;

(b) Determine os pontos de interseção do gráfico das duas funções;

(c) Determine graficamente os valores de x *para os quais* $g(x) > f(x)$;

Exercício 5.8 *Resolva o seguinte sistema*

$$\begin{cases} 2^{x-2y} & = & \dfrac{1}{8} \\ 3^{xy} & = & 9 \end{cases}$$

Exercício 5.9 *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) A função f *é crescente ou decrescente? Por quê?*

(b) Verifique se f *é inversível e, caso seja, calcule sua inversa;*

(c) Qual o domínio de f^{-1}*?*

Exercício 5.10 *Determine o domínio da função* $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x)$.

Exercício 5.11 *Considere as funções*

$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Com base nelas, calcule:

(a) $cosh(0)$ *e* $cosh(1)$*;*

(b) $senh(0)$ *e* $senh(1)$*;*

(c) $cosh(\ln x)$ *e* $senh(\ln x)$*;*

(d) $\dfrac{senh(x)}{cosh(x)}$*;*

(e) $senh(-x)$ *e* $cosh(-x)$*;*

(f) $senh^2(x) + cosh^2(x)$*;*

Exercício 5.12 *Uma das componentes principais de uma contaminação nuclear, como a de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa contínua de aproximadamente 2,47% ao ano. Estimativas preliminares, após o desastre de Chernobyl, sugeriram que levaria uns 100 anos até que a região fosse novamente segura para a habitação humana. Que percentual do estrôncio-90 original ainda permaneceria após esse tempo?*

Exercício 5.13 *A meia-vida do rádio-226 é de* 1620 *anos.*

(a) *Obtenha uma fórmula para a quantidade* Q *de rádio que resta após* t *anos, dado que a quantidade inicial é* Q_0*;*

(b) *Que percentual da substância resta após* 500 *anos?*

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.