CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Funções

Neste capítulo estudaremos funções e suas propriedades básicas. Comecemos com a seguinte definição (pouco intuitiva):

Definição 1.1 *Sejam A e B dois conjuntos, com $A \neq \emptyset$. Dizemos que uma relação f entre A e B é uma* ***função*** *se, a cada elemento $a \in A$ existe um único elemento $b \in B$ tais que $(a, b) \in f$. Neste caso, escreve-se $b \doteq f(a)$.*

Enfatizamos os seguintes fatos sobre uma função f entre A e B:

i) se $(a, b) \in f$, então escrevemos $b \doteq f(a)$ e dizemos que b é a imagem de a pela função f;

ii) utilizamos a notação $f : A \to B$;

iii) o conjunto A é dito domínio de f, enquanto que B é dito contra-domínio de f.

Exemplo 1.1 *Considere as seguintes relações de R em R:*

$$f = \{(x, y); y = 3x + 2\} \quad e \quad g = \{(x, y); x^2 = y^2\}.$$

- *Note que f é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pois se $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f$, então $y_1 = y_2$.*
- *Por outro lado, g não é uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De fato, note que $(1, 1) \in g$, bem como $(1, -1) \in g$.*

Teorema 1.1 *Se f e g são duas funções entre A e B, então*

$$f = g \iff f(x) = g(x), \ \forall x \in A. \tag{1}$$

Demonstração: De fato, suponha $f = g$. Por definição, temos

$$f \subset A \times B \ \text{ e } \ g \subset A \times B.$$

Dado $x \in A$, considere $y \in B$ tal que $y = f(x)$, donde $(x, y) \in f$. Uma vez que $f = g$, então $f \subset G$, logo $(x, y) \in g$. Portanto, devemos ter $y = g(x)$ e assim $f(x) = y = g(x)$. Desta forma, fica demonstrado que

$$f = g \implies f(x) = g(x), \ \forall x \in A.$$

Verifiquemos agora a outra implicação. Assim, assuma que

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in A.$$

Desta igualda temos que $x \in A$ implica em

$$(x, f(x)) = (x, g(x)).$$

Como $(x, f(x)) \in f$, então $(x, g(x)) \in g$, logo $f \subset g$. De modo análogo, temos $g \subset f$ e assim temos $f = g$.

■

Observação 1.1 *Note que a definição dada acima é pouco intuitiva e menos ainda aplicável para estudarmos funções e suas propriedades. De modo mais prático, podemos considerar uma função* $f : A \to B$ *como um trio:*

a) O domínio A;

b) O contra-domínio B;

c) Uma regra f *que, a cada* $x \in A$*, associa um* ***único*** $b \in B$*, o qual denota-se por* $b = f(a)$*.*

Está será a ***definição*** *que estaremos utilizando no decorrer deste curso. Em particular, podemos dizer que duas funções* $f, g : A \to B$ *são iguais quado* $f(x) = g(x)$*, para todo* $x \in A$*.*

Definição 1.2 *Sejam* $f : A \to B$ *uma função,* $X \subset A \neq \emptyset$ *e* $Y \subset B$ *um conjunto não vazio.*

a) A imagem direta de X *por* f *é o conjunto*

$$f(X) = \{y \in B;\ y = f(x), \quad \text{para algum} \quad x \in X\}. \tag{2}$$

b) A imagem inversa de Y *por* f *é o conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}. \tag{3}$$

Exemplo 1.2 *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^2 + y^2$*. Neste caso, note que* $f^{-1}(\{1\})$ *coincide com a circunferência centrada na origem e de raio 1.*

Exemplo 1.3 *Uma reta que tem equação* $ax + by = c$ *é o conjunto de pontos*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by = c\}.$$

Note que tomando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = ax + by$ *obtemos*

$$R = f^{-1}\{c\}.$$

Observação 1.2

- *Note que* $f(X)$ *é um subconjunto de* B*. Em particular, quando* $X = A$*, dizemos que* $f(A)$ *é a* ***imagem*** *da função* f*, a qual é indicada por* $Im(f)$*.*
- *Por outro lado,* $f^{-1}(Y)$ *é um subconjunto de* A*, o qual pode ser vazio.*

Exercício 1.1 *Considere* $A = \{1,3,5,7,8,9\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(n) = n+1$. *Determine*

(a) $f(A)$;

(b) $f(\{1,3\})$

(c) $f(1)$;

(d) $f^{-1}(\{2,4,6\})$;

(e) $f^{-1}(\{5\})$;

(f) $f^{-1}(\{2,4,6,8,9,10\})$.

Exercício 1.2 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Determine:

(a) $f(\mathbb{Q})$;

(b) $f(\mathbb{Q}^C)$;

(c) $f^{-1}(\{0\})$;

(d) $f([0,1])$; *Aqui,* $[0,1]$ *indica o intervalo de 0 a 1, contendo estes extremos.*

(e) $f^{-1}([4,5))$; *Aqui,* $[4,5)$ *indica o intervalo de* 4 *a* 5, *contendo* 4, *mas não o* 5.

Definição 1.3 (Função identidade) *Dado um conjunto não vazio* X *defini-se a função identidade* $I : X \to X$ *pondo* $I(x) = x$.

Definição 1.4 (Restrição) *Dados uma função* $f : X \to Y$ *e um conjunto não vazio* $A \subset X$ *defini-se a função* $f|_A : A \to Y$ *pondo* $f|_A(x) = f(x)$.

Definição 1.5 *O gráfico de uma função* $f : A \to B$ *é o subconjunto* $G_f \subset A \times B$ *definido por*

$$G_f = \{(x,y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Exercício 1.3 *Esboce o gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x$. *Esboce o gráfico da função* f *quando esta é restrita ao conjunto* $\mathbb{Z}$.

Definição 1.6 *Uma função* $f : A \to B$ *é dita*

i) *injetiva se* $x, y \in A$ *são tais que* $f(x) = f(y)$, *então* $x = y$.

ii) *sobrejetiva se* $Im(f) = B$.

iii) *bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 1.4 *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetiva, pois $f(-1) = f(1)$. Tal função também não é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -4$.*

Exemplo 1.5 *A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = 3x+1$ é injetiva, mas não sobrejetiva. De fato, suponha $x, w \in \mathbb{Z}$ tais que $g(x) = g(w)$. Segue da definição de g que $3x + 1 = 3w + 1$, donde $x = w$. Assim, g é injetiva. Para verificar que g não é sobre, basta notar que não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 0$.*

Teorema 1.2 *Suponha $f : A \to B$ uma função bijetiva. Então, existe uma função bijetiva $g : B \to A$ que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$f(x) = y \iff x = g(y). \tag{4}$$

Demonstração: Exercício. ■

1.1 Composição de funções

Definição 1.7 *Sejam $f : A \to B$ e $g : X \to Y$ duas funções tais que*

$$Im(f) \subset X.$$

Nestas condições, defini-se a função $g \circ f : A \to Y$ pondo

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)).$$

Dizemos que $g \circ f$ é a função composta das funções g e f.

Observação 1.3 *Note que nem sempre é verdade que $g \circ f = f \circ g$. De fato, mesmo que exista $g \circ f$, nada garante a existência de $f \circ g$. Por outro lado, é sempre verdade que*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

supondo válida as composições.

Definição 1.8 *A inversa de uma função $f : A \to B$, quando existe, é uma função $g : B \to A$ tal que*

$$(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A \tag{5}$$

e

$$(f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in B. \tag{6}$$

Neste caso, utiliza-se a notação $g = f^{-1}$.

Teorema 1.3 *Uma função $f : A \to B$ é inversível se, e somente se, é bijetiva.*

Demonstração: Suponha $f : A \to B$ é inversível. Para verificar que f é injetiva, considere $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Note então que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Mas, por (5), temos

$$g(f(x_1)) = x_1 \quad \text{e} \quad g(f(x_2)) = x_2,$$

logo $x_1 = x_2$.

Para demonstrar a sobrejetividade, tome $y \in B$. Definindo $x = g(y)$, obtemos de (6) que

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

A demonstração da recíproca é consequência imediata do Teorema 1.2.

■

1.2 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.4 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.*

Exercício 1.5 *Considere as seguintes definições a respeito de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

- *f é dita uma função **par** se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
- *f é dita uma função **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

a) Mostre que $f(x) = x^2$ é par.

b) Mostre que $f(x) = x^3$ é ímpar.

c) Exiba uma função que não é par e nem ímpar.

d) Mostre que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Exercício 1.6 *As funções f e g, cujas regras são dadas respectivamente por*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad e \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Explique.

Exercício 1.7 *Demonstre o Teorema 1.2.*

Exercício 1.8 *Considere uma função $f : A \to B$. Mostre que a função $g : A \to Im(f)$, dada por $g(x) = f(x)$ é sobrejetiva.*

Exercício 1.9 *Dados conjuntos A e B, suponha que existam funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Prove que existe uma bijeção $h : A \to B$.*

Exercício 1.10 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *as seguintes operações:*

$$(x,y)+(w,z)=(x+w,y+z) \quad e \quad \alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,\alpha y),\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Suponha $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *uma função não nula que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $f(\alpha(x,y))=\alpha f(x,y)$;

ii) $f((x,y)+(w,z))=f(x,y)+f(w,z)$.

Mostre que f *é injetiva se, e somente se,* $f(x,y)=(0,0)$ *implica em* $(x,y)=(0,0)$.

Exercício 1.11 *Sejam* X *um conjunto e* $A\subset X$ *um subconjunto. Defina a função* $\chi_A:X\to\mathbb{R}$ *pondo*

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & se \quad x\in A,\\ 0, & se \quad x\notin A.\end{cases}$$

Mostre que:

a) se $A,B\subset X$, *então* $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$;

b) se $A,B\subset X$, *então*

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B;$$

c) $\chi_{A^C}=1-\chi_A$.

Exercício 1.12 *Sejam* X *um conjunto não vazio e* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto de suas partes. Defina em* $\mathcal{P}(X)$ *a seguinte relação:*

$$A\sim B \ \doteq \ \text{existe uma função bijetiva} \ \ f:A\to B.$$

Mostre que $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

Exercício 1.13 *Considere* $f:A\to B$ *uma função sobrejetiva e defina em* A *a seguinte relação:*

$$x\sim y \ \doteq \ f(x)=f(y).$$

a) Mostre que $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

b) Se f *é injetiva, então quantos elementos temos numa classe* $[x]$*?*

c) Defina $X=A/\sim$. *Mostre que a função* $F:X\to B$ *dada por*

$$F([x])=f(x)$$

está bem definida, isto é, independe da escolha do representante x *de* $[x]$.

d) Mostre que a função F *é bijetiva.*

Exercício 1.14 *Considere uma função* $f:X\to Y$, *conjuntos* $A\subset X$ *e* $B\subset Y$.

(a) Mostre que $f[f^{-1}[B]]\subset B$ *e* $f^{-1}[f[A]]\supset A$;;

(b) Mostre um exemplo onde não vale $f[f^{-1}[B]]=B$, *ou* $f^{-1}[f[A]]=A$;

(c) *Mostre que se f é sobrejetiva, então $f[f^{-1}[B]] = B$.*

Exercício 1.15 *Considere um conjunto A e uma coleção de subconjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in M}$, sendo M um conjunto de índices. Dada uma função $f : A \to B$, mostre que:*

(a) $f\left[\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda \in M} f[A_\lambda]$;

(b) $f\left[\bigcap_{\lambda \in M} A_\lambda\right] \subset \bigcap_{\lambda \in M} f[A_\lambda]$;

(c) *Obtenha um exemplo em que* $f[\bigcap_{\lambda \in M} A_\lambda] \neq \bigcap_{\lambda \in M} f[A_\lambda]$;

Supondo $\{B_\mu\}_{\mu \in L}$ uma coleção de subconjunto de B, para uma família de índices L. Mostre que:

(d) $f^{-1}\left[\bigcup_{\lambda \in M} B_\mu\right] = \bigcup_{\lambda \in M} f^{-1}[B_\mu]$;

(f) $f^{-1}\left[\bigcap_{\lambda \in M} B_\mu\right] = \bigcap_{\lambda \in M} f^{-1}[B_\mu]$;

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.