CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Os números Inteiros

Nesta seção iremos fazer uma construção[1] do números inteiros via propriedades dos números naturais.

Para motivar a construção que será apresentada, note que daquilo que temos em mente de números inteiros podemos escrever

$$7 = 5 + 2, \text{ bem como } \; 7 = 3 + 4,$$

ou seja,

$$5 + 2 = 3 + 4.$$

Podemos ainda escrever

$$-9 = 1 - 10, \text{ bem como } \; -9 = 2 - 11,$$

isto é,

$$1 - 10 = 2 - 11.$$

De modo equivalente,

$$1 + 11 = 2 + 10.$$

Isto permite visualizar cada número inteiro como infinitas representações de números naturais. Isto (forçando a amizade) nos da uma ideia para uma construção via classes de equivalências:

Definição 1.1 *Sejam (a, b) e (c, d) dois pares ordenados de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Introduzimos a relação*

$$(a, b) \sim (c, d) \doteq a + d = b + c. \tag{1}$$

Proposição 1.1 *A relação (1) é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

Demonstração: Exercício. ■

Tendo em vista a Proposição acima, podemos considerar as classes de equivalência

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\; a + y = b + x\}. \tag{2}$$

Vejamos alguns exemplos importantes de classes:

- para cada $n \in \mathbb{N}$ obtem-se a classe

$$\begin{aligned}[(n, n)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\; x + n = y + n\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\; x = y\}\end{aligned}$$

[1]Uma referência para o estudo que será apresentado aqui é [7]. É importante notar que em tal referência considera-se 0 um número natural, logo algumas notações e afirmações podem diferir daquelas que serão apresentadas neste curso. Entretanto, o conjunto dos números inteiros apresentado lá é o mesmo que será apresentado aqui.

- para cada $n \in \mathbb{N}$ obtem-se a classe

$$\begin{aligned}[(1, n+1)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n + 1 = y + 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n = y\}\end{aligned}$$

Por exemplo, se $n = 1$, então todos os pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $x + 1 = y$ pertencem a $[(1, 2)]$. ALguns representantes de $[(1, 2)]$ são:

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), \ldots$$

- para cada $n \in \mathbb{N}$ obtem-se a classe

$$\begin{aligned}[(n+1, 1)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + 1 = y + n + 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + n\}\end{aligned}$$

Por exemplo, se $n = 1$, então todos os pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $x = y + 1$ pertencem a $[(1, 2)]$. ALguns representantes de $[(2, 1)]$ são:

$$(2, 1), (3, 2), (4, 3), \ldots$$

Definição 1.2 (Números inteiros) *Defini-se por número inteiro cada classe de equivalência $[(a, b)]$. O conjunto quociente*

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$$

será denotado por $\mathbb{Z}$ e chamado de conjunto dos números inteiros.

Teorema 1.1 *Dados dois números inteiros $[(a, b)]$ e $[(c, d)]$ defina*

$$[(a, b)] + [(c, d)] \doteq [(a + c, b + d)] \tag{3}$$

e

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] \doteq [(ac + bd, ad + bc)]. \tag{4}$$

Nestas condições, as operações acima não dependem dos representantes.

Demonstração: Verificaremos apenas para a soma, sendo que o produto é deixado como exercício. De fato, dados $(a', b') \in [(a, b)]$ e $(c', d') \in [(c, d)]$ mostraremos que

$$(a' + c', b' + d') \sim (a + c, b + d).$$

Como $(a', b') \in [(a, b)]$ e $(c', d') \in [(c, d)]$, então

$$a' + b = a + b' \quad \text{e} \quad c' + d = c + d',$$

logo

$$\begin{aligned}(a' + c') + (b + d) &= (a' + b) + (c' + d) \\ &= (a + b') + (c + d') \\ &= (b' + d') + (a + c),\end{aligned}$$

ou seja, $(a' + c', b' + d') \sim (a + c, b + d)$.

$\blacksquare$

Proposição 1.2 *Para qualquer* $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$*, são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $[(a,b)] + [(n,n)] = [(a,b)]$*;*

(b) $[(a,b)] \cdot [(n,n)] = [(n,n)]$*;*

(c) $[(a,b)] \cdot [(2,1)] = [(a,b)]$*;*

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 1.2 *A classe* $[(n,n)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (a) na proposição anterior. Além disso, a classe* $[(2,1)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (c).*

Demonstração: Exercício. ■

Observação 1.1 *Note que podemos escrever* $[(1,1)] = [(n,n)]$*, pois* $(1,1) \sim (n,n)$*, seja qual for o natural* $n \in \mathbb{N}$*. Em virtude da unicidade obtida pelo Teorema acima, iremos escrever* $0 = [(1,1)]$ *e chama-lo de zero. Neste sentido, podemos escrever*

$$[(a,b)] + 0 = [(a,b)] \quad e \quad [(a,b)] \cdot 0 = 0.$$

Teorema 1.3 *As operações de soma e produto definidas acima são comutativas, associativas e vale a propriedade distributiva.*

Demonstração: Exercício. ■

A partir deste momento iremos abandonar a notação de classe de equivalência e denotar os elementos de $\mathbb{Z}$ por letras, isto é, escreveremos $m \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$, etc. Entretanto, o leitor deve ficar atento que $m \in \mathbb{Z}$ indica

$$m = [(a,b)].$$

É interessante lembrar que estamos acostumados a pensar nos números naturais como um subconjunto dos números inteiros. Sendo assim, como tal ideia se encaixa na teoria aqui desenvolvida? Abaixo apresentamos uma solução para este problema. Para tanto, considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = [(n+1,1)].$$

Note que f é uma função injetiva. De fato, se $f(n) = f(m)$, então $[(n+1,1)] = [(m+1,1)]$. Segue desta igualdade que

$$(n+1,n) \sim (m+1,m),$$

logo

$$n+1+m = n+m+1,$$

donde $n = m$.

Note então que

$$f(1) = [(2,1)],\ f(2) = [(3,1)],\ f(3) = [(4,1)], \dots,$$

desta forma podemos "identificar" cada número natural n de forma única à classe $[(n+1,1)]$. Assim, podemos escrever

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

no sentido de que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ de modo injetivo. Num abuso de notação, podemos escrever

$$1 = [(2,1)],\ 2 = [(3,1)],\ 3 = [(4,1)], \dots,$$

Note que, felizmente[2],

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= [(2,1)] + [(3,1)] = [(5,2)] \\ &= [(4,1)] \\ &= 3. \end{aligned}$$

Definição 1.3 *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = [(n+1,1)]$. Define-se o conjunto $\mathbb{Z}^+$ pondo $\mathbb{Z}^+ = f(\mathbb{N})$. Os elementos de $\mathbb{Z}^+$ são chamados de inteiros não negativos. Em particular,*

$$\mathbb{Z}^+ = \{[(n+1,1)],\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Considere agora a função injetiva[3] $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$, dada por

$$g(1) = [(1, n+1)].$$

Note que $f(n) + g(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned} f(n) + g(n) &= [(n+1,1)] + [(1,n+1)] \\ &= [(n+2,n+2)] \\ &= [(1,1)] \end{aligned}$$

Definição 1.4 *Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = [(1,n+1)]$. Define-se o conjunto $\mathbb{Z}^-$ pondo $\mathbb{Z}^- = g(\mathbb{N})$. Os elementos de $\mathbb{Z}^-$ são chamados de inteiros não positivos. Em particular,*

$$\mathbb{Z}^- = \{[(1,n+1)],\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 1.4 *Os conjuntos $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ e $\{0\}$ são disjuntos e vale a igualdade*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$

Demonstração: Exercício. ∎

[2] O exercício 1.10 irá te trazer paz.

[3] Verifique!

Motivados pelo entendimento usual de números inteiros, é possível identificar cada número natural n ao número inteiro $-n$ definido por

$$-n \doteq [(1, n+1)].$$

Assim, temos (por abuso de notação):

$$-1 = [(1,2)],\ -2 = [(1,3)],\ -3 = [(1,4)], \ldots,$$

Em particular, observe que considerando as notações $1 = [(2,1)]$ e $-1 = [(1,2)]$ chaga-se em

$$\begin{aligned} -1 \cdot 1 &= [(1,2)] \cdot [(2,1)] \\ &= [(4,5)] \\ &= [(1,2)] \\ &= -1. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} -1 \cdot n &= [(1,2)] \cdot [(n+1,1)] \\ &= [(n+3, 2n+3)] \\ &= [(1, n+1)] \\ &= -n. \end{aligned}$$

1.1 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Dados $m, p \in \mathbb{Z}$ escreveremos $m < p$ sempre que existir $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$p = m + s.$$

Observação 1.2 *Pela linguagem de classes de equivalência, temos* $[(a,b)] < [(c,d)]$ *quando existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$[(c,d)] = [(a,b)] + [(n+1,1)].$$

Por exemplo, temos $[(2,1)] < [(4,1)]$*, pois* $[(4,1)] = [(2,1)] + [(3,1)]$.

Teorema 1.5 *Dados* $m, s \in \mathbb{Z}$ *então uma, e somente uma, das possibilidades abaixo ocorre:*

$$m = s,\ m < s, \quad ou \quad s < m.$$

Demonstração: Exercício. ∎

1.2 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.1 *Demonstre a Proposição 1.1.*

Exercício 1.2 *Mostre que (4) não depende da escolha do representante.*

Exercício 1.3 *Demonstre a Proposição 1.2.*

Exercício 1.4 *Demonstre o Teorema 1.2.*

Exercício 1.5 *Demonstre o Teorema 1.3.*

Exercício 1.6 *Demonstre o Teorema 1.4.*

Exercício 1.7 *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $m \cdot n = 0$. Mostre que $m = 0$, ou $n = 0$.*

Exercício 1.8 *Mostre que as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^-$ dadas por*

$$f(n) = [(n+1, 1)] \quad e \quad g(n) = [(1, n+1)]$$

são bijetivas.

Exercício 1.9 *Sejam $m, k \in \mathbb{Z}^+$ e $s, x \in \mathbb{Z}^-$.*

(a) Mostre que $m \cdot k \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Mostre que $s \cdot x \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Mostre que $m \cdot s \in \mathbb{Z}^-$.

Exercício 1.10 *Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por*

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

Mostre que

$$f(n+m) = f(n) + f(m) \quad e \quad f(nm) = f(n) \cdot f(m),$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Além disso, se $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que $n < m$, então

$$f(n) < f(m).$$

Exercício 1.11 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que existe um único $x \in \mathbb{Z}$ tal que $a + x = b$.*

Exercício 1.12 *Mostre que se $m \in \mathbb{Z}^-$, então*

$$m \leq x, \ \forall x \in \mathbb{Z}^+.$$

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.