

Fundamentos de Matemática Elementar 1

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 1: 14/09

Exercício 1 (20 pontos) *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto U . Mostre que:*

(a) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

(b) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$.

Exercício 2 (20 pontos) *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Mostre que:*

(a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, sendo $X, Y \subset A$.

(b) $f^{-1}(W \cap Z) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z)$, sendo $W, Z \subset B$.

Exercício 3 (30 pontos) *Considere $f : A \rightarrow B$ uma função sobrejetiva e defina em A a seguinte relação:*

$$x \sim y \doteq f(x) = f(y).$$

a) *Mostre que \sim é uma relação de equivalência, ou seja,*

- $x \sim x, \forall x \in A$;
- $x \sim y$ implica $y \sim x, \forall x, y \in A$;
- $x \sim y$ e $y \sim z$ implica $x \sim z, \forall x, y, z \in A$;

b) *Pondo $X = A / \sim$, mostre que a função $F : X \rightarrow B$ dada por*

$$F([x]) = f(x)$$

está bem definida, isto é, independe da escolha do representante x de $[x]$.

c) *Mostre que F é bijetiva.*

Exercício 4 (30 pontos) *Utilizando indução mostre que $n^3 + 5n$ é divisível por 6, para cada $n \in \mathbb{N}$. (Você pode assumir que um número é divisível por 6 se, e somente se, o é por 2 e 3 ao mesmo tempo).*