

Fundamentos de Matemática Elementar 1

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 3: Entregar dia 23/11

Exercício 1 Considere o conjunto \mathbb{C} dos pares de números reais (x, y) munido das seguintes operações:

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \quad \text{e} \quad (x, y) \cdot (s, t) = (xs - ty, xt + ys).$$

Mostre que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo.

Exercício 2 Considere \mathbb{R} como um corpo ordenado com as operações de soma e produto usuais.

(a) Mostre que $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $a^2 = a$, então $a = 1$ ou $a = 0$;

(b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$;

Exercício 3 Considere \mathbb{R} como o corpo construído através dos cortes de Dedekind. Dado $r \in \mathbb{Q}$ defina

$$r^* \doteq \{p \in \mathbb{Q}; p < r\}.$$

(a) Mostre que cada r^* é um corte.

(b) Se $r, s \in \mathbb{Q}$, então $r^* + s^* = (r + s)^*$.

Exercício 4 Seja $(S, <)$ conjunto ordenado que satisfaz a propriedade do ínfimo. Mostre que vale a propriedade do supremo.