Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 1 - 01/08/2023

Apresentação da disciplina

Ementa: Introdução ao pensamento, à linguagem e a argumentação matemática; Conjuntos; Números naturais e Inteiros; Frações e números racionais; Números reais; Números irracionais; Operações aritméticas; Expressões numéricas e algébricas; Potências; Equações; Inequações; Progressões geométrica e aritmética.

Objetivo: O objetivo central deste curso é apresentar alguns conceitos matemáticos que os ajudarão no amadurecimento do pensar matemático.

Critérios de avaliação: Provas e listas de exercícios.

NOTAS DE AULA !!!!

FILHO, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

NIVEN I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

HALLACK, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

LIMA, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

LIMA, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

PIMENTEL, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

Programa

1. Linguagem e argumentação matemática:
   (a) Noções de lógica;
   (b) Sobre demonstraões;
2. Conjuntos:
   (a) Noção de conjuntos e subconjuntos;
   (b) Relação de inclusão. Álgebra de conjuntos;
   (c) Relações binárias.
3. Os números naturais: Indução matemática
4. Os números inteiros e racionais:
   (a) Definições;
   (b) Soma e produto;
   (c) Relação de ordem.
5. Expressões numéricas e algébricas:
   (a) Potências;
   (b) Equações;
   (c) Inequações;

O que é um conjunto finito?

Definição (Conjunto finito)

Um conjunto A é dito finito se existem um número natural n e uma função bijetiva

$$f : A \to \{1, 2, 3 \ldots, n\}.$$

- Observe que é então equivalente e pedir que existam um número natural n e uma função bijetiva
$$f : \{1, 2, 3 \ldots, n\} \to A.$$

Exemplo

- *Se $n \in \mathbb{N}$, então o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é finito.*
- *O conjunto dos números primos **não** é finito.*

O que é um conjunto finito?

O que é um conjunto finito?

Definição (Conjunto infinito)

Um conjunto A *é dito infinito quando não é finito.*

O que é um conjunto finito?

Definição (Conjunto infinito)

Um conjunto A é dito infinito quando não é finito.

Exemplo

- *O conjunto dos números primos é infinito.*

O que é um conjunto finito?

Definição (Conjunto infinito)

Um conjunto A é dito infinito quando não é finito.

Exemplo

- *O conjunto dos números primos é infinito.*

Teorema

- *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existem um subconjunto próprio $X \not\subset A$ e uma função bijetiva $f : A \to X$.*

O que é um conjunto finito?

Definição (Conjunto infinito)

Um conjunto A é dito infinito quando não é finito.

Exemplo

- *O conjunto dos números primos é infinito.*

Teorema

- *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existem um subconjunto próprio $X \not\subset A$ e uma função bijetiva $f : A \to X$.*
- *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to A$.*

Quanto elementos tem num conjunto?

Definição

Dado um conjunto finito A e uma função bijetiva $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$*, dizemos que A possui n elementos e escrevemos* $\#(A) = n$.

Quanto elementos tem num conjunto?

Definição

Dado um conjunto finito A e uma função bijetiva $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$*, dizemos que A possui n elementos e escrevemos* $\#(A) = n$.

PERGUNTA:

- Pode existir um outro $m \in \mathbb{N}$ e uma outra bijeção $g : \{1, 2, \ldots, m\} \to A$?

Quanto elementos tem num conjunto?

Definição

Dado um conjunto finito A e uma função bijetiva $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$*, dizemos que A possui n elementos e escrevemos* $\#(A) = n$.

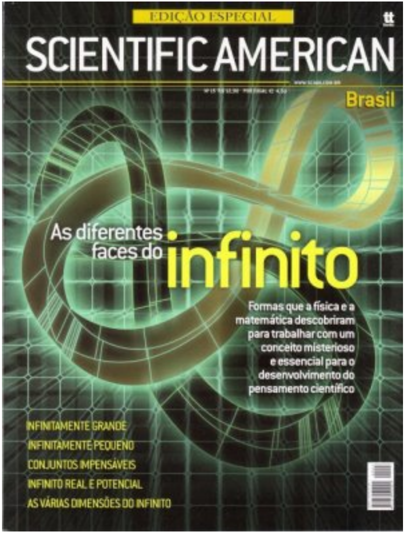
PERGUNTA:

- Pode existir um outro $m \in \mathbb{N}$ e uma outra bijeção $g : \{1, 2, \ldots, m\} \to A$?

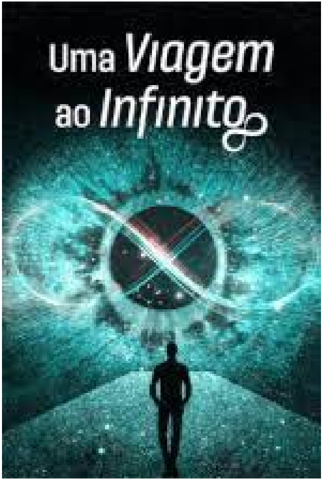
PERGUNTA:

- E se A é infinito? Podemos determinar o “ tamanho"desse infinito?

Scientific American do Brasil, Edição Especial n. 15



Uma Viagem ao Infinito (Netflix)



Conjunto Enumerável

Definição

Um conjunto A é dito ***enumerável*** *se é finito, ou existe um função bijetiva*

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

Conjunto Enumerável

Definição

*Um conjunto A é dito **enumerável** se é finito, ou existe um função bijetiva*

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

Exemplo

- *O conjunto dos números naturais é enumerável.*

Conjunto Enumerável

Definição

Um conjunto A é dito ***enumerável*** *se é finito, ou existe um função bijetiva*

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

Exemplo

- *O conjunto dos números naturais é enumerável.*
- *O conjunto dos número naturais pares é enumerável.*

Conjunto Enumerável

Definição

*Um conjunto A é dito **enumerável** se é finito, ou existe um função bijetiva*

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

Exemplo

- *O conjunto dos números naturais é enumerável.*
- *O conjunto dos número naturais pares é enumerável.*
- *O conjunto dos números primos é enumerável.*

Insanidades....

Insanidades....

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável

Insanidades....

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável

- De fato, bas considerar a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par }, \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Insanidades....

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável

- De fato, bas considerar a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par },\\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável

Insanidades....

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável

- De fato, bas considerar a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par },\\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável

- Veremos....