Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 13 - 28/09/2023

Equações e inequações via funções I

INTERSEÇÃO DE GRÁFICOS

- Uma parte importante no nosso estudo será a interseção de gráficos. Para tanto, considere duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ e seus respectivos gráficos $Gr(f)$ e $Gr(g)$.
- Assim, podemos estudar o conjunto

$$X = Gr(f) \cap Gr(g),$$

- Considere a seguinte definição: dados dois pontos (a,b) e (c,d) pertencentes a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ escrevemos

$$(a,b)=(c,d), \quad \text{se} \;\; a=c \text{ e } b=d.$$

- Por outro lado, para dois pontos (a,b) e (a,d) escreveremos:
  - $(a,b)<(a,d)$, se $b<d$;
  - $(a,b)>(a,d)$, se $b>d$.

Considere agora duas funções $f,g:A\to\mathbb{R}$ os conjuntos

$$\begin{aligned}\mathscr{X} &= \{x\in A;\ f(x)<g(x)\},\\ \mathscr{Y} &= \{x\in A;\ f(x)=g(x)\},\\ \mathscr{Z} &= \{x\in A;\ f(x)>g(x)\}.\end{aligned}$$

- Note então que:
  - se $x\in\mathscr{X}$, então $(x,f(x))<(x,g(x))$;
  - se $x\in\mathscr{Y}$, então $(x,f(x))=(x,g(x))$;
  - se $x\in\mathscr{Z}$, então $(x,f(x))>(x,g(x))$.

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

DEFINIÇÃO: Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:

a) crescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
b) decrescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
c) constante se $f(x_1) = f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in I$.

OBSERVAÇÃO: É importante observar que uma função pode apresentar os comportamentos crescente e decrescente como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Por outro lado, uma função pode não apresentar nenhum deste comportamentos como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

DEFINIÇÃO: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, defini-se por função quadrática a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

DEFINIÇÃO: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, defini-se por função quadrática a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

TEOREMA: Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números reais tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ sejam não colineares. Nestas condições existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2 \ \text{ e } \ f(x_3) = y_3. \tag{1}$$

FORMA CANÔNICA:

- Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática e $x \in \mathbb{R}$ fixado. Temos então:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \tag{2}$$

- Defina o número real

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

TEOREMA: A equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

possui solução em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\Delta \geq 0$. Além disso, se $\Delta = 0$, então temos uma única solução. Se $\Delta > 0$, então existem duas soluções distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ \text{ e } \ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Além disso, vale a igualdade

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$$

OBSERVAÇÕES

- O resultado acima nos dá uma primeira informação sobre o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

OBSERVAÇÕES

- O resultado acima nos dá uma primeira informação sobre o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

i) quando $\Delta = 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x num único ponto, a saber, $x = -b/2a$;

Observações

- O resultado acima nos dá uma primeira informação sobre o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

i) quando $\Delta = 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x num único ponto, a saber, $x = -b/2a$;

ii) quando $\Delta > 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x em dois pontos distintos, a saber,
$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ e } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{3}$$

OBSERVAÇÕES

- O resultado acima nos dá uma primeira informação sobre o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

i) quando $\Delta = 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x num único ponto, a saber, $x = -b/2a$;

ii) quando $\Delta > 0$, o gráfico de f intercepta o eixo x em dois pontos distintos, a saber,
$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ e } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{3}$$

iii) quando $\Delta < 0$, o gráfico de f não intercepta o eixo x.

TEOREMA: Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $\Delta = 0$. Temos então:

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a > 0$;

b) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a < 0$.

TEOREMA: Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $\Delta = 0$. Temos então:

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a > 0$;

b) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a < 0$.

Demonstração: Segue de (2) que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

o que ocorre se, e somente se, $a > 0$. O item b) é provado de forma semelhante. $\blacksquare$

- Como fica o gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = |f(x)| = |ax^2 + bx + c|$$

O MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

- O movimento uniformemente variado pode ser caracterizado pela função

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

- $f(t)$ é a posição no instante t.
- a indica a aceleração.
- c indica a posição inicial no instante $t = 0$.
- b indica a velociadade inicial no instante $t = 0$.