Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

PPGM UFPR
Programa de Pós-Graduação em Matemática

DMAT - UFPR

MATEMÁTICA UFPR

AULA 14 - 03/10/2023

PA e PG

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

DEFINIÇÃO

Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO

- Note que podemos fazer as identificações

$$1 \mapsto x(1) \doteq x_1,\ 2 \mapsto x(2) \doteq x_2,\ ldotsn \mapsto x(n) \doteq x_n, \ldots$$

- Assim, utilizamos a notação

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

para indicar uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- Em particular, x_n é dito n-ésimo termo da sequência.

Exemplo: progressão aritmética

Definição

Fixados números reais x_1 e r, chamamos de progressão aritmética (P.A.) de razão r a sequência

$$x_1,\ x_2 = x_1 + r, \ldots, x_{n+1} = x_n + r, \ldots,$$

Proposição

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma P.A. de razão r. Então,

(a) $x_{n+1} = x_1 + nr$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$.

Exemplo: progressão geométrica

Definição

Fixados números reais x_1 e r, chamamos de progressão geométrica (P.G.) de razão r a sequência

$$x_1,\ x_2 = x_1 \cdot r, \ldots, x_{n+1} = x_n \cdot r, \ldots,$$

Proposição

Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma P.G. de razão r, então $x_{n+1} = x_1 r^n$. Além disso, se $r \neq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

- Para provar a segunda parte precisaremos do seguinte resultado: dados $r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ vale $(1-r)(1+r+r^2+\ldots+r^\ell) = 1-r^{\ell+1}$ e

$$\sum_{j=0}^{\ell} r^j = \frac{1-r^{\ell+1}}{1-r},\ r \neq 1.$$

Série geométrica

Teorema

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma P.G. de razão $|r| < 1$. Então,

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x_1 \frac{1}{1-r}$$

Exemplo (Série geométrica)

Dado $|r| < 1$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$$