Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 16 - 24/10/2023

Corpos ordenados

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \ x = y, \ y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

- *Neste caso, dizemos que S é um conjunto ordenado e utilizamos a notação $(S, <)$.*
- *Utilizamos também a notação*

$$x \leq y \doteq x < y, \ ou \ \ x = y.$$

- *Os símbolos $>$ e $\geq$ também serão utilizados de modo usual.*

Exemplo

Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são ordenados.

Supremo

Definição

Seja $(S, <)$ um conjunto ordenado. Um subconjunto $E \subset S$ é dito

- *limitado* ***superiormente*** *se existe $\beta \in S$ tal que $x \leq \beta$, para todo $x \in E$.*
- *limitado* ***inferiormente*** *se existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \leq x$, para todo $x \in E$.*
- ***limitado*** *se for inferiormente e superiormente.*

Definição

Sejam $(S, <)$ um conjunto ordenado e $E \subset S$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $\beta \in S$ é dito supremo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) *β é uma cota superior de E;*

(ii) *se $\gamma < \beta$, então γ não é uma cota superior de E.*

Observação

- *O supremo de E, quando existe, será denotado por $\sup E$.*
- *Note que $\sup E$, quando existe, é a* ***menor das cotas superiores****!*

Ínfimo

Definição

Sejam $(S, <)$ *um conjunto ordenado e* $E \subset S$ *um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento* $\alpha \in S$ *é dito ínfimo de* E*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) α *é uma cota inferior de* E*;*

(ii) *se* $\alpha < \gamma$*, então* γ *não é uma cota inferior de* E*.*

Observação

- *O ínfimo de* E*, quando existe, será denotado por* $\inf E$*.*
- *Note que* $\inf E$*, quando existe, é a* ***maior das cotas inferiores****!*

Definição

Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz a*

- *Propriedade do Supremo (PS) se vale o seguinte:*

  Se $E \subset S$ *é não vazio e limitado superiormente, então existe* $\beta = \sup E$ *e* $\beta \in S$.

- *Propriedade do Ínfimo (PI) se vale o seguinte:*

  Se $E \subset S$ *é não vazio e limitado inferiormente, então existe* $\alpha = \inf E$ *e* $\alpha \in S$.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).*

Corpo

- Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

Corpo

- Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(Propriedades da Adição)

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

Corpo

- Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(Propriedades da Adição)

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

(Propriedades do Produto)

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$.

Corpo

- Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(Propriedades da Adição)

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

(Propriedades do Produto)

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(Propriedade Distributiva)

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Observação

Observação

- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento y que satisfaz (A4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = -x$.

Observação

- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento* y *que satisfaz (A4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = -x$.
- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento* y *que satisfaz (P4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = x^{-1}$.

Observação

- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento y que satisfaz (A4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = -x$.
- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento y que satisfaz (P4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = x^{-1}$.
- *Muitas vezes omite-se o símbolo* $\cdot$, *isto é, escrevemos* xy *ao invés de* $x \cdot y$.

Um exemplo interessante

- Considere o conjunto $\mathbb{C}$ dos pares de números reais (x, y) munido das seguintes operações:

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \text{ e } (x, y) \cdot (s, t) = (xs - ty, xt + ys).$$

Um exemplo interessante

- Considere o conjunto $\mathbb{C}$ dos pares de números reais (x, y) munido das seguintes operações:

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \ \text{ e } \ (x, y) \cdot (s, t) = (xs - ty, xt + ys).$$

- Temos o corpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dos números complexos.

Propriedades operacionais

- Num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ valem as seguintes afirmações.

(a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$;

(b) $x + y = x \Rightarrow y = 0$;

(c) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$;

(d) $-(-x) = x$;

(e) $x \neq 0$ e $xy = xz \Rightarrow y = z$;

(f) $x \neq 0$ e $xy = x \Rightarrow y = 1$;

(g) $x \neq 0$ e $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$;

(h) $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$;

(i) $0x = 0$;

(j) $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$;

(k) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$;

(l) $(-x)(-y) = xy$;

Definição

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$. *Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

Definição

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$. *Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

i) $0 \in F$ *e* $1 \in F$*;*

Definição

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$. *Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

i) $0 \in F$ *e* $1 \in F$;

ii) $a + b \in F$, *para todo* $a, b \in F$;

Definição

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$. *Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

i) $0 \in F$ *e* $1 \in F$*;*

ii) $a + b \in F$*, para todo* $a, b \in F$*;*

ii) $a \cdot b \in F$*, para todo* $a, b \in F$.

Definição

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$*. Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

i) $0 \in F$ *e* $1 \in F$*;*

ii) $a + b \in F$*, para todo* $a, b \in F$*;*

ii) $a \cdot b \in F$*, para todo* $a, b \in F$*.*

- Neste caso, temos que F também é um corpo e podemos escrever $(F, +, \cdot)$.

$\mathbb{R}$ como subcorpo de $\mathbb{C}$

- Relembrando, defini-se $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ pondo $\mathbb{C}$ como o conjunto de pares de números reais munido com as operações

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \text{ e } (x, y) \cdot (s, t) = (xs - ty, xt + ys).$$

- Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ no qual existe um relação de ordem $<$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ no qual existe um relação de ordem $<$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $y < z$ implica em $x + y < x + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

- Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ no qual existe um relação de ordem $<$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $y < z$ implica em $x + y < x + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

ii) $x > 0$ e $y > 0$ implica em $xy > 0$;
Neste caso, escreve-se $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$.

- Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ no qual existe um relação de ordem $<$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $y < z$ implica em $x + y < x + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

ii) $x > 0$ e $y > 0$ implica em $xy > 0$;
Neste caso, escreve-se $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$.

- Num corpo ordenado $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$ temos os seguintes conjuntos

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K};\ x > 0\} \ \text{ e } \ \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K};\ x < 0\}.$$

- Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ no qual existe um relação de ordem $<$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $y < z$ implica em $x + y < x + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

ii) $x > 0$ e $y > 0$ implica em $xy > 0$;
Neste caso, escreve-se $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$.

- Num corpo ordenado $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$ temos os seguintes conjuntos

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K};\ x > 0\} \ \text{ e } \ \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K};\ x < 0\}.$$

- Os elementos de $\mathbb{K}^+$ são chamados de positivos e os de $\mathbb{K}^-$ são ditos negativos.

- Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ no qual existe um relação de ordem $<$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $y < z$ implica em $x + y < x + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

ii) $x > 0$ e $y > 0$ implica em $xy > 0$;
Neste caso, escreve-se $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$.

- Num corpo ordenado $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$ temos os seguintes conjuntos

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K};\ x > 0\} \ \text{ e } \ \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K};\ x < 0\}.$$

- Os elementos de $\mathbb{K}^+$ são chamados de positivos e os de $\mathbb{K}^-$ são ditos negativos.

Teorema

Num corpo ordenado $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$ *valem as seguintes propriedades:*

(a) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$, *e vice-versa;*

(b) $x > 0$ *e* $y < z \Rightarrow xy < xz$*;*

(c) $x < 0$ *e* $y < z \Rightarrow xy > xz$*;*

(d) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$*. Em particular,* $1 > 0$*;*

(e) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$*;*

- Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

- Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

Teorema (O conjunto $\mathbb{R}$)

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz a Propriedade do Supremo. Além disso, $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

- Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

Teorema (O conjunto $\mathbb{R}$)

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz a Propriedade do Supremo. Além disso, $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

- Uma interessante aplicação deste resultado é dada abaixo:

- Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

Teorema (O conjunto $\mathbb{R}$)

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz a Propriedade do Supremo. Além disso, $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

- Uma interessante aplicação deste resultado é dada abaixo:

Teorema

Em $\mathbb{R}$ são válidas as seguintes afirmações:

a) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, é possível obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$;*

- Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

Teorema (O conjunto $\mathbb{R}$)

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz a Propriedade do Supremo. Além disso, $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

- Uma interessante aplicação deste resultado é dada abaixo:

Teorema

Em $\mathbb{R}$ são válidas as seguintes afirmações:

a) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, é possível obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$;*

b) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, é possível obter $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

- A propriedade a) no teorema acima é conhecida como *Propriedade Arquimediana* de $\mathbb{R}$.

- Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

Teorema (O conjunto $\mathbb{R}$)

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ *que satisfaz a Propriedade do Supremo. Além disso,* $\mathbb{Q}$ *é um subcorpo de* $\mathbb{R}$.

- Uma interessante aplicação deste resultado é dada abaixo:

Teorema

Em $\mathbb{R}$ *são válidas as seguintes afirmações:*

a) *Dados* $x, y \in \mathbb{R}$, *com* $x > 0$, *é possível obter* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $nx > y$;

b) *Dados* $x, y \in \mathbb{R}$, *com* $x < y$, *é possível obter* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x < r < y$.

- A propriedade a) no teorema acima é conhecida como *Propriedade Arquimediana* de $\mathbb{R}$.
- Por sua vez, o item b) pode ser trocado pela expressão $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.