Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 3 - 10/08/2023

Classes de Equivalência

Produto cartesiano

Definição

Dados dois conjuntos, não vazios, A e B definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) *tais que* $x \in A$ *e* $y \in B$.

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Produto cartesiano

Definição

Dados dois conjuntos, não vazios, A e B definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) *tais que* $x \in A$ *e* $y \in B$.

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo

Sendo $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ *e* $C = \{0\}$ *temos:*

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

(b) $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

Produto cartesiano

Definição

Dados dois conjuntos, não vazios, A e B definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) *tais que* $x \in A$ *e* $y \in B$.

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo

Sendo $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ *e* $C = \{0\}$ *temos:*

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

(b) $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

- É interessante notar que o produto cartesiano não é comutativo, ou seja, nem sempre vale a igualdade $A \times B = B \times A$.

Relação

Definição

Uma relação entre os conjuntos A e B é um subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$.

- *Lês-se $(a, b) \in \mathcal{R}$: a está relacionado com b e utilizamos a notação $a\mathcal{R}b$.*

Relação

Definição

Uma relação entre os conjuntos A e B é um subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$.

- *Lês-se* $(a, b) \in \mathcal{R}$*: a está relacionado com b e utilizamos a notação* $a\mathcal{R}b$.
- Uma relação entre um conjunto A e ele mesmo será chamada de **relação em** A.

Exemplo

Uma relação de A com A é o conjunto

$$\Delta = \{(x,y) \in A \times A; x = y\},$$

ou seja, $\Delta = \{(x,x); x \in A\}$. *Em particular, note que se* $x \neq y$, *então* $(x,y) \neq \Delta$.

Exemplo

Uma relação de A com A é o conjunto

$$\Delta = \{(x,y) \in A \times A; x = y\},$$

ou seja, $\Delta = \{(x,x); x \in A\}$. *Em particular, note que se* $x \neq y$, *então* $(x,y) \neq \Delta$.

Exemplo

O conjunto

$$\mathcal{R} = \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ pq = 0\}$$

é uma relação de $\mathbb{Z}$.

Exemplo

O conjunto

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y = 2k\pi,\ \textit{para algum}\ k \in \mathbb{Z}\}$$

é uma relação de $\mathbb{R}$.

Exemplo

O conjunto

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y = 2k\pi,\ \textit{para algum}\ k \in \mathbb{Z}\}$$

é uma relação de $\mathbb{R}$*. Em particular, note que se* $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, então*

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ x - y = 2k\pi.$$

Exemplo

O conjunto

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y = 2k\pi,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$$

é uma relação de $\mathbb{R}$*. Em particular, note que se* $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, então*

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ x - y = 2k\pi.$$

- Note que tal relação satisfaz as seguintes propriedades:

($\mathcal{R}$1) $x\mathcal{R}x$;
($\mathcal{R}$2) $x\mathcal{R}y$ implica em $y\mathcal{R}x$;
($\mathcal{R}$3) $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ implica em $x\mathcal{R}z$.

Partição

Uma partição de um conjunto A é uma decomposição deste em subconjuntos tais que cada elemento de A pertence a apenas um destes subconjuntos. Tais subconjuntos são chamados de células.

Partição

Uma partição de um conjunto A é uma decomposição deste em subconjuntos tais que cada elemento de A pertence a apenas um destes subconjuntos. Tais subconjuntos são chamados de células.

- Uma partição sobre um conjunto A define a seguinte relação $\mathcal{R}$ sobre A:

$$x\mathcal{R}y \doteq x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma célula.} \tag{1}$$

Partição

Uma partição de um conjunto A é uma decomposição deste em subconjuntos tais que cada elemento de A pertence a apenas um destes subconjuntos. Tais subconjuntos são chamados de células.

- Uma partição sobre um conjunto A define a seguinte relação $\mathcal{R}$ sobre A:

$$x\mathcal{R}y \doteq x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma célula.} \tag{1}$$

- Note que tal relação satisfaz as seguintes propriedades:
  - $x\mathcal{R}x$;
  - se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;
  - se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

Relação de equivalência

*Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita **relação de equivalência** quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexiva) $x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;

(simétrica) se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;

(transitiva) se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

Relação de equivalência

Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita ***relação de equivalência*** *quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexiva) $x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;

(simétrica) se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;

(transitiva) se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

- Relações de equivalência são indicadas pela notação $x \sim y$, ao invés de $x\mathcal{R}y$.

Relação de equivalência

*Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita **relação de equivalência** quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexiva) $x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;

(simétrica) se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;

(transitiva) se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

- Relações de equivalência são indicadas pela notação $x \sim y$, ao invés de $x\mathcal{R}y$.
- Dado $x \in A$, sua **classe de equivalência** é, por definição, o conjunto

$$[x] \doteq \{y \in A;\ x \sim y\}.$$

Relação de equivalência

Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita ***relação de equivalência*** *quando satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} &\text{(reflexiva)} && x\mathcal{R}x, \text{ para todo } x \in A; \\ &\text{(simétrica)} && \text{se } x\mathcal{R}y, \text{ então } y\mathcal{R}x; \\ &\text{(transitiva)} && \text{se } x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z, \text{ então } x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

- Relações de equivalência são indicadas pela notação $x \sim y$, ao invés de $x\mathcal{R}y$.
- Dado $x \in A$, sua **classe de equivalência** é, por definição, o conjunto

$$[x] \doteq \{y \in A;\ x \sim y\}.$$

- Os elementos de $[x]$ serão chamados de **representantes** da classe.

Relação de equivalência

Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita ***relação de equivalência*** *quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexiva) $x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;

(simétrica) se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;

(transitiva) se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

- Relações de equivalência são indicadas pela notação $x \sim y$, ao invés de $x\mathcal{R}y$.
- Dado $x \in A$, sua **classe de equivalência** é, por definição, o conjunto

$$[x] \doteq \{y \in A;\ x \sim y\}.$$

- Os elementos de $[x]$ serão chamados de **representantes** da classe.
- O conjunto de todas as classes de equivalências, geradas por $\sim$, é chamado de **conjunto quociente** e será denotado por $A \,/ \sim$. Assim,

$$A \,/ \sim \doteq \{[x];\ x \in A\}.$$

Exemplo

Considere X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de suas partes, ou seja,

$$\mathcal{P}(X) = \{A;\ A \subset X\}$$

Em $\mathcal{P}(X)$ temos que a relação

$$A\mathcal{R}B \doteq A \subset B$$

não é de equivalência.

Exemplo

Considere X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de suas partes, ou seja,

$$\mathcal{P}(X) = \{A;\ A \subset X\}$$

Em $\mathcal{P}(X)$ temos que a relação

$$A\mathcal{R}B \doteq A \subset B$$

não é de equivalência.

Exemplo

Em $\mathbb{R}$ temos a relação de equivalência

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ x - y = 2k\pi.$$

Teorema

Considere uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A. Então, são válidas as seguintes afirmações:

i) $[x] \neq \emptyset$, *para qualquer* $x \in A$;

ii) *se* $a, b \in [x]$, *então* $a \sim b$;

iii) *Se* $a \in [x]$, *então* $[x] = [a]$;

iv) *Dados* $x, y \in A$, *então* $[x] = [y]$, *ou* $[x] \cap [y] = \emptyset$.

O conjuntos $\mathbb{Z}_n$

Considere $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer. Em $\mathbb{Z}$ temos a relação de equivalência

$$a \sim_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ a - b = kn.$$

O conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim_n$ é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

O conjuntos $\mathbb{Z}_n$

Considere $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer. Em $\mathbb{Z}$ temos a relação de equivalência

$$a \sim_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ a - b = kn.$$

O conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim_n$ é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

- Note que $a \sim_n b$ se, e somente se, $a - b$ é múltiplo de n.

O conjuntos $\mathbb{Z}_n$

Considere $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer. Em $\mathbb{Z}$ temos a relação de equivalência

$$a \sim_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ a - b = kn.$$

O conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim_n$ é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

- Note que $a \sim_n b$ se, e somente se, $a - b$ é múltiplo de n.
- Observe que
$$[a] = \{a - kn,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

O conjuntos $\mathbb{Z}_n$

Considere $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer. Em $\mathbb{Z}$ temos a relação de equivalência

$$a \sim_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ a - b = kn.$$

O conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim_n$ é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

- Note que $a \sim_n b$ se, e somente se, $a - b$ é múltiplo de n.
- Observe que
$$[a] = \{a - kn,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$
- Por exemplo, para $n = 7$, temos
$$[a] = \{a - k7,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$
Em particular, temos que $[3] = [10]$ e $[1] = [28]$.

O conjuntos $\mathbb{Z}_n$

Considere $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer. Em $\mathbb{Z}$ temos a relação de equivalência

$$a \sim_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ a - b = kn.$$

O conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim_n$ é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

- Note que $a \sim_n b$ se, e somente se, $a - b$ é múltiplo de n.
- Observe que
$$[a] = \{a - kn,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$
- Por exemplo, para $n = 7$, temos
$$[a] = \{a - k7,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$
Em particular, temos que $[3] = [10]$ e $[1] = [28]$.
- Podemos definir em $\mathbb{Z}_n$ as seguintes operações:
$$[a] + [b] = [a + b] \ \text{ e } \ [a] \cdot [b] = [ab]$$