# Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

## AULA 5 - 17/08/2023

# Axiomas de Peano e Indução

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de $n$.

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de $n$.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) $s$ é uma função injetiva;

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de $n$.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) $s$ é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de $n$.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) $s$ é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de $n$.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) $s$ é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

a) $1 \in X$,

# Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de $n$.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) $s$ é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

a) $1 \in X$,
b) se $n \in X$, então $s(n) \in X$,

então temos que $X = \mathbb{N}$.

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;
- P2 diz que 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;
- P2 diz que 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- P3 é conhecido como *Princípio de indução*. Ele pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;
- P2 diz que 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- P3 é conhecido como *Princípio de indução*. Ele pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:

  *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural n satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $s(n)$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.*

- É muito importante enfatizar que podemos utilizar P3 para fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

- É muito importante enfatizar que podemos utilizar P3 para fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

## Exemplo

- *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos* $s(n) \neq n$.

- É muito importante enfatizar que podemos utilizar P3 para fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

## Exemplo

- *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos* $s(n) \neq n$.
- *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $n \neq 1$, *então existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $s(m) = n$.

# Operações em $\mathbb{N}$

## Definição

*Seja* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *a função sucessor. Dados* $m, n \in \mathbb{N}$ *defini-se:*

$$\left\{ \begin{array}{l} m + 1 \doteq s(m) \\ m + s(n) \doteq s(m+n) \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} m \cdot 1 \doteq m \\ m \cdot s(n) \doteq m \cdot n + m \end{array} \right.$$

# Ufa....

# Ufa....

## Observação

*Note que se tomarmos $m = 1$ na definição de soma, então*

$$1 + 1 = s(1).$$

# Ufa....

## Observação

*Note que se tomarmos* $m = 1$ *na definição de soma, então*

$$1 + 1 = s(1).$$

*Utilizando a notação* $2 = s(1)$*, temos*

$$1 + 1 = 2.$$

# Ufa....

## Observação

*Note que se tomarmos* $m = 1$ *na definição de soma, então*

$$1 + 1 = s(1).$$

*Utilizando a notação* $2 = s(1)$, *temos*

$$1 + 1 = 2.$$

*Agora, considere* $m = 2$ *na definição de soma. Temos:*

$$2 + 1 = s(2) = s(s(1)).$$

# Ufa....

## Observação

*Note que se tomarmos $m = 1$ na definição de soma, então*

$$1 + 1 = s(1).$$

*Utilizando a notação $2 = s(1)$, temos*

$$1 + 1 = 2.$$

*Agora, considere $m = 2$ na definição de soma. Temos:*

$$2 + 1 = s(2) = s(s(1)).$$

*Utilizando a notação $3 = s(2)$, temos*

$$2 + 1 = 3.$$

# Ufa....

## Observação

*Note que se tomarmos $m = 1$ na definição de soma, então*

$$1 + 1 = s(1).$$

*Utilizando a notação $2 = s(1)$, temos*

$$1 + 1 = 2.$$

*Agora, considere $m = 2$ na definição de soma. Temos:*

$$2 + 1 = s(2) = s(s(1)).$$

*Utilizando a notação $3 = s(2)$, temos*

$$2 + 1 = 3.$$

*Tomando $m = 3$ na definição de soma...*

## Teorema

*Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Temos então as seguintes propriedades:*

a) $(m+n)+p = m+(n+p)$;

b) $m+1 = 1+m$;

c) $m+n = n+m$;

d) $m+p = n+p \implies m = n$;

e) $m \cdot n = n \cdot m$;

f) $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$;

g) $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$;

h) $m \cdot (n+p) = (n+p) \cdot m$.

## Definição

*Dado dois números naturais* $m, n$ *diremos que* $m$ *é menor do que* $n$ *se existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = m + p$. *Neste caso, utilizamos a notação* $m < n$.

## Definição

*Dado dois números naturais $m, n$ diremos que $m$ é menor do que $n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, utilizamos a notação $m < n$.*

## Proposição

*Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. São válidas as seguintes propriedades:*

a) *se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;*

b) *$m < n$, então $m + p < n + p$;.*

c) *se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$;*

d) *vale apenas uma, e somente uma, das possibilidades: $m = n$, $m < n$, ou $n < m$*

- A propriedade d) é conhecida como **tricotomia.**

- A propriedade d) é conhecida como **tricotomia.**
- Note que o princípio de indução pode ser reformulado:

  *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se $1$ satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural $k$ satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $k+1$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.*

- A propriedade d) é conhecida como **tricotomia.**
- Note que o princípio de indução pode ser reformulado:

*Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se $1$ satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural $k$ satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $k+1$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.*

## Exemplo

*Dado $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$2(1+2+3+\ldots+n) = n(n+1).$$