Processo Seletivo Estendido 2016

FUNÇÕES

LISTA: Conjuntos

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Teoria Elementar dos Conjuntos* de Edgard de Alencar Filho.

`Deseja-se que com esta lista o aluno possa:`

- praticar o uso de notações básicas como, por exemplo,

$$x \in A,\ A \subset B,\ A \cap B,\ A \cup B,\ A^C;$$

- treinar sua capacidade de argumentação matemática, ou seja, aprender as primeiras ideias de como demonstrar um resultado.

---

1 Operações com conjuntos

Exercício 1 *Considere o conjunto* $A = \{1,3,5,7,11\}$. *Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.*

(a) $1 \in A$

(b) $2 \in A$

(c) $7 \notin A$

(d) $11 \in A$

(e) $\{1\} \in A$

(f) $\{1,3,4\} \subset A$

(g) $\{1,3\} \cap \{3,5,7\} \subset A$

(h) $4 \subset A$

Exercício 2 *Considere os conjuntos*

$$A = \{1,2,3\} \quad e \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

(a) Verifique se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a_1) $2 \in A$;

(a_2) $11 \in A$;

(a_3) $1 \in \mathcal{P}(A)$;

(a_4) $\{1,3\} \subset A$;

(a_5) $\{2,3\} \in \mathcal{P}(A)$;

(a_6) $\{1,3\} \in A$;

(b) Como foi construído o conjunto $\mathcal{P}(A)$?

Exercício 3 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1,2,3,4,5\}$,
- $B = \{2,3,4\}$,
- $C = \{2,4,5\}$.

Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $B \subset A$

(d) $B \subset C$

(e) $C \subset A$

(f) $C \subset B$

(g) $C \subset C$

(h) $\emptyset \subset B$

Exercício 4 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{3, 4, 5, 6\},$$

determine:

- $A \cap B$ *e* $A \cup B$
- $A \cap C$ *e* $A \cup C$
- $B \cap C$ *e* $B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C$ *e* $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C$ *e* $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cup C)$

Exercício 5 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
- $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
- $D = \{3, 4, 5\}$,
- $E = \{3, 5\}$,

verifique quais destes conjuntos podem substituir o conjunto X nas seguintes afirmações:

(a) $X \subset D$ e $X \not\subset B$

(b) $X \subset C$ e $X \not\subset A$

(c) $X \subset A$ e $X \not\subset C$

Exercício 6 *Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, achar os conjuntos $X \neq A$ tais que $\{1\} \subset X$ e $X \subset A$.*

Exercício 7 *Determine os elementos do conjunto X, Y e Z, tais que:*

$$X \cap Y = \{2, 4\}, \quad X \cup Y = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$X \cap Z = \{2, 3\}, \quad X \cup Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 8 *Considere o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e os subconjuntos*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3\} \quad e \quad Z = \{4, 6, 8\}.$$

Determine:

- X^C, Y^C *e* Z^C
- $X^C \cap X$ *e* $X^C \cup X$
- $X \cap Y$, $X \cap Z$ *e* $Y \cap Z$
- $(X \cup Y)^C$ *e* $X^C \cup Y^C$
- $(X \cap Y)^C$ *e* $X^C \cap Y^C$
- $(X \cap Z)^C$ *e* $X^C \cap Z^C$

Exercício 9 *Construa exemplos de conjuntos A, B e C que não satisfazem as seguintes afirmações:*

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$, então $A \cap C = \emptyset$;

(b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \cap B \neq \emptyset$;

(c) Se $A \cap B \subset C$, então $A \subset C$;

Exercício 10 *Determine os elementos dos seguintes produtos cartesianos:*

- $\{1\} \times \{1, 2\}$
- $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$
- $\{0, 2\} \times \{0, 2\}$
- $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \times \{\{5\}, \{6\}\}$

Exercício 11 *Considere os conjuntos* $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3\}$ *e* $C = \{3, 4\}$. *Determine:*

- $A \times (B \cup C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercício 12 *Determine os números reais que tornam iguais os seguintes pares ordenados:*

(a) $(x + y, 1)$ *e* $(3, x - y)$

(b) $(y - 2, 2x + 1)$ *e* $(x - 1, y + 2)$

Exercício 13 *Sejam* a *e* b *dois números pertencentes conjunto dos naturais* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. *Determine a interseção dos conjuntos*

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, \ldots\}.$$

Exercício 14 *Sejam* U *um conjunto e* A, B, C *três de seus subconjuntos. Demonstre as seguintes propriedades:*

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ *e* $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$