Processo Seletivo Estendido 2016

FUNÇÕES

LISTA FUNÇÕES - 1

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista foi inicialmente elaborada pelo prefessor Alexandre Trovon (UFPR). A presente versão possui também algumas alterações feitas pelo professor Lucas Pedroso (UFPR)

- Nesta lista de exercícios há problemas algéebricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamnte relacionados ao assunto serão também traqbalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que dêem a você uma ideia numérica.
- Matamática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

---

1 Números Reais

1. Expresse cada número como decimal:

(a) $\dfrac{7}{10}$ (b) $\dfrac{2}{5}$ (c) $\dfrac{9}{15}$ (d) $-\dfrac{7}{8}$

(e) $-\dfrac{17}{20}$ (f) $\dfrac{4}{11}$ (g) $-\dfrac{8}{7}$ (h) $-\dfrac{56}{14}$

2. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:

(a) $2,4$ (b) $-3,6$ (c) $0,5555\ldots$

(d) $0,\overline{18}$ (e) $0,09595\ldots$ (f) $3,\overline{27}$

(g) $1,38181\ldots$ (h) $-4,1\overline{7}$ (i) $2,472472\ldots$

(j) $1,6\overline{42}$ (k) $0,\overline{857142}$ (l) $1,35135135...$

3. Cortou-se, primeiramente, $\dfrac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se $0,6$ do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.

4. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?

5. Transforme os decimais em frações irredutíveis. Em seguida, reponda a pergunta.

(a) 2,5 e 2,4999... (b) 1,02 e $1,01\overline{9}$ (c) 3,74 e 3,73999... (d) $5,\overline{9}$ e 6

(e) O que você observou nas frações dos itens anteriores?

6. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Caso não seja verdadeira, apresentar um **contra-exemplo**, ou seja, um exemplo para o qual a afirmação feita é falsa.

(a) A soma de dois números racionais é sempre racional.
(b) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.
(c) A soma de um número irracional com um racional é sempre irracional.
(d) O produto de dois números racionais é sempre racional.
(e) O produto de dois números irracionais é sempre irracional.
(f) Um número irracional elevado ao quadrado é sempre irracional.
(g) A raiz quadrada de um número irracional positivo é sempre irracional.
(h) Quaisquer que sejam $a, b, c \in I\!R$, se $a + b \geq a + c$ então $b \geq c$.
(i) Quaisquer que sejam $a, b, c \in I\!R$, se $ab = ac$ então $b = c$.
(j) Quaisquer que sejam $a, b, c \in I\!R - \{0\}$, se $ab < ac$ então $b < c$.
(k) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R$, se $a < b$ então $a^2 < b^2$.
(l) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R$, se $a^2 = b^2$ então $a = b$.
(m) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R - \{0\}$, se $a < b$ então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
(n) Qualquer que seja $a \in I\!R$ positivo, temos que $a^2 > a$.
(o) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R$, temos que $|ab| = |a||b|$.
(p) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R$, temos que $|a - b| \leq |a| + |b|$.
(q) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R$, se $|a| \leq b$ então $a \leq b$.
(r) Quaisquer que sejam $a, b \in I\!R$, se $|a| \geq b$ então $a \geq b$.

7. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

(a) $3 \in I\!R$ (b) $I\!N \subset I\!R$ (c) $\mathbb{Z} \subset I\!R$

(d) $\dfrac{1}{2} \in I\!R - \mathbb{Q}$ (e) $\sqrt{4} \in I\!R - \mathbb{Q}$ (f) $\sqrt[3]{4} \in I\!R - \mathbb{Q}$

(g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in I\!R - \mathbb{Q}$ (h) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in I\!R - \mathbb{Q}$ (i) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

8. Efetue as operações indicadas e escreva, em cada caso, se o resultado é um número racional ou irracional.

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$
(b) $7 - \sqrt[3]{5} - (8 - \sqrt[3]{5})$
(c) $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}$
(d) $5 + \sqrt{11} - (3 - \sqrt{11})$
(e) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$
(f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
(g) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

9. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

10. Mostre que existem a e b racionais, tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

11. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

(a) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

(b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$.
(c) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$.

12. Dados dois números a e b reais e positivos, chama-se *média aritmética* de a e b ao número $\dfrac{a+b}{2}$ e chama-se *média geométrica* ao número $\sqrt{ab}$. Se $0<a<b$, mostre que
(a) $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.
(b) $a < \sqrt{ab} < b$.
(c) $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.

13. Verifique que para todo número $x>0$ temos que $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$. (*Dica:* tente multiplicar ambos os lados da desigualdade por x e observar o que acontece.)

14. Determine o valor de x, sabendo que $\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}$.

15. Prove que:

(a) $|x|\geq 0$

(b) $|x|=0$ se, e somente se, $x=0$

(c) $|x|=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$

(d) $|x-y|\leq |x|+|y|$

(e) $\big|\,|x|-|y|\,\big|\leq |x+y|$

(f) Se $y\neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

(g) Dado $c>0$, tem-se $|x|>c$ se, e somente se, $x<-c$ ou $x>c$.

16. Resolva as inequações abaixo.

(a) $|x-7|<9$

(b) $|2x+3|\leq 10$

(c) $|3x-1|<x$

(d) $|2x^2+3x+3|\leq 3$

(e) $|x-1|+|x-3|<4x$

(f) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|}\geq \dfrac{1}{5}$

17. Represente graficamente os seguintes intervalos:

(a) $[1,+\infty[$

(b) $]-2,+\infty[$

(c) $[3,8[$

(d) $]-\infty,-1[\,\cup\,[2,+\infty[$

18. Dentre os conjuntos a seguir, distingua quais são intervalos, representando-os com as notações adotadas.

(a) $\{x\in I\!R \,|\, 5-x<3x-7\}$

(b) $\{x\in I\!R \,|\, \sqrt{(x+3)^2}=x+3\}$

(c) $\{x\in I\!R \,|\, \sqrt{x^2-4}\leq x-1\}$

(d) $\{x\in I\!R \,|\, |x-2|<\dfrac{1}{2} \text{ e } x\leq 2\}$

(e) $\{x\in I\!R \,|\, \dfrac{x}{|x|}=1,\ x\neq 0\}$

(f) $\{x\in I\!R \,|\, |x-1|<|4-x|\}$

19. Se $a>0$ e b é um número qualquer, mostre que $|x-b|<a$ é equivalente a $b-a<x<b+a$ e também equivalente a $x\in]b-a,b+a[$.

20. Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero. Para isso, fatore o trinômio (ou complete os quadrados) e estude o sinal. Expresse a resposta na notação de intervalo.

(a) $x^2 - 2x - 3$ (b) $x^2 + x - 42$ (c) $2x^2 - x - 1$

(d) $x^2 - 9$ (e) $16x^2 - 2x$ (f) $x^2 + 3x$

(g) $x^2 + x + 1$

Observe como resolvemos a letra (g). Faça o mesmo para os próximos itens.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \qquad \text{(completamos o quadrado)} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim, $x^2+x+1 > 0$ se, e somente se, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, isto é, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$. Como $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in I\!R$, a expressão $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}$ é válida para todo $x \in I\!R$. Portanto, $x^2 + x + 1 > 0$ para $x \in]-\infty, +\infty[$. Por outro lado, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < -\frac{3}{4}$ não tem solução, já que o membro esquerdo da desigualdade é um número positivo. Logo a solução para $x^2 + x + 1 < 0$ é $\emptyset$, o conjunto vazio.

(h) $x^2 + 1$ (i) $-x^2$ (j) $-x^2 + 2x - 2$

(k) $x^2 + 3x + 3$ (l) $2x^2 + x + 1$ (m) $x^2 + x - 1$

21. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

(a) $x(x-3)(6-x) < 0$ (b) $\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+5} \geq 0$

(c) $|5x| > 1$ (d) $|3x - 4| \geq 2$

(e) $\dfrac{|x-1|(x^2-2)}{x-1} > 0$ (f) $|x - 3| > x + 1$

(g) $\dfrac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+2)(x^6+6)} > 0$ (h) $|x-1| - |x-3| \geq \dfrac{|x-1|}{2}$

(i) $\dfrac{6 - x - x^2}{(x^2+x+1)(x+4)(x-6)^2} \geq 0$ (j) $\dfrac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x^2+3)(2x+1)} \geq 0$

22. Mostre que se $|x - 6| < 1$ então $|x| < 7$.

23. Suponha que $|x - 8| < 2$. Quão grande $|x - 5|$ pode ser?

24. Obtenha um número $\delta > 0$, tal que se $|x - 4| < \delta$ então $|\sqrt{x} - 2| < \dfrac{1}{10}$.

25. Considere $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$ (n natural e $a_n \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \dfrac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $f(x)$, é sabido que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Usando este fato, prove que são irracionais:

(a) $\sqrt{3}$.

(b) $\sqrt[4]{5}$.

(c) $\sqrt{p}$, com p um número primo.

2 Generalidades sobre Funcões

26. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Com a tabela

x	y
a	4
e	3
i	3
o	2
u	1

estabelecemos uma regra entre os elementos de A e B de modo que a cada $x \in A$ colocado na tabela, associa-se o $y \in B$ colocado à sua direita. Verifique se a regra assim estabelecida determina uma função $f : A \to B$.

27. Com os mesmos conjuntos A e B do exercício anterior, diga se cada tabela dá origem a uma função $f : A \to B$. Em caso afirmativo, diga se a função é injetora e se é sobrejetora.

(a)

x	y
a	
e	1
i	
o	2
u	

(b)

x	y
a	1
e	1
i	1
o	2
u	2

(c)

x	y
a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

(d)

x	y
a	1
e	2
e	3
i	4
u	5
u	1

(e)

x	y
a	5
e	5
i	5
o	5
u	5

(f)

x	y
a	1
i	2
u	3

(g)

x	y
a	3
e	4
i	5
o	5
u	4

(h)

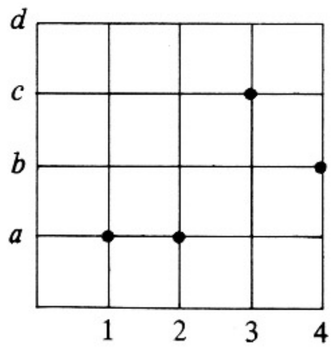
x	y
a	1
e	4
i	2
o	5
u	3

(i)

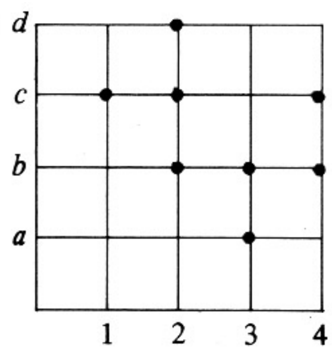
x	y
a	2
e	1
i	2
o	3
u	3

28. Em cada item a seguir, considere o conjunto G dos pontos assinalados na malha

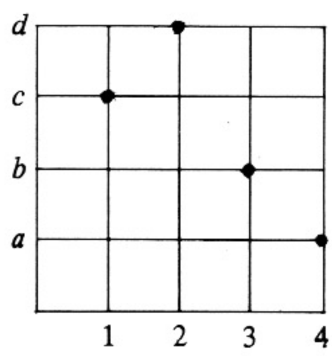
a)

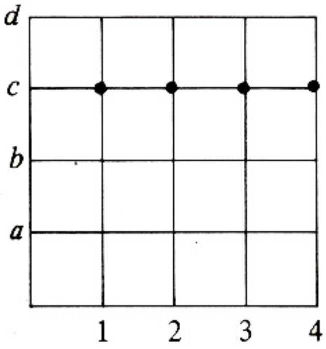


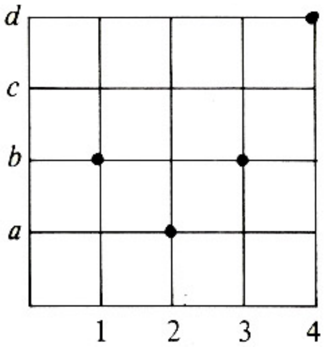
b)

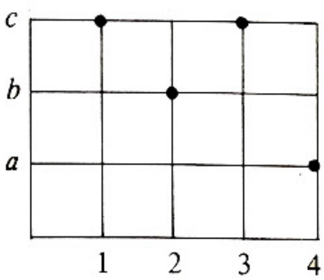


c)



d) 

e) 

f) 

formado por pontos do produto cartesiano $A \times B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, exceto em f), onde $B = \{a, b, c\}$. Em cada caso, verifique se G determina uma função. Em caso afirmativo, diga se é injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.

29. Sabe-se que um triângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y, expresse y como função de x. Expresse a área desse triângulo como função de x.

30. Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a tem lados x e y, sendo que y está sobre o diâmetro a. Expresse y em função de x. Expresse a área do retângulo em função de x.

31. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo retângulo ABC, em função da base a e da altura h.

32. Tico e Teco, torcedores fanáticos de certo time da capital, ganharam de seus tios uns cofrinhos na forma de porquinhos. No de Tico havia R\$30,00 e no de Teco R\$ 50,00. Os moleques resolveram guardar parte da mesada semanal. Tico prometeu guardar R\$ 5,00 por semana e Teco, R\$ 3,00.
(a) Faça uma tabela representando a situação semanal das mesadas de Tico e Teco.
(b) Determinar as quantias nos cofrinhos em 20 semanas.
(c) Quando terão quantias iguais?
(d) Em que semana Tico terá R\$ 12,00 a mais que Teco?
(e) Em que semana Teco terá R\$ 12,00 a mais que Tico?
(f) Em que momento Tico terá o dobro da quantia de Teco?
(g) Expresse a quantia guardada pelo Tico em função do número n de semanas.
(h) Expresse a quantia guardada pelo Teco em função do número n de semanas.

33. Calcular $f(a)$ sabendo que:

(a) $a = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(b) $a = 0$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{1 - x^2}$

(c) $a = \dfrac{7}{2}$ e $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(d) $a = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 5x + 1}$

34. Se $f(x) = x^3 + 4x - 3$, calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(\sqrt{2})$.

35. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$, calcule:

(a) $g\left(\frac{1}{a}\right)$ (b) $\frac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$ (d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $f(x) = \sqrt{g(a)}$

36. Calcular $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

(a) $f(x) = x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ (d) $f(x) = 4x^4$

37. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostre que $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{f(a)}{a^2}$

38. Se $f(x) = ax + b$ mostre que vale $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

39. Se $f(x) = x^2$ mostre que $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

40. Se $f(x) = ax$ mostre que $f(x)+f(1-x) = f(1)$ para todo x real. Mostre também que $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2.

41. Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ calcular:

(a) $f(-x)$ (b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ (d) $f(f(x))$

42. Determine o domínio das seguintes funções

(a) $f(x) = \sqrt{x+5}$ (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{-x+2}{x+1}}$ (d) $f(x) = 4\sqrt{\frac{-8x+12}{x+5}}$

(e) $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$ (f) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$

(g) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$ (h) $\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x+1}}$

43. Seja $f : A \to I\!R_+$. Determine o domínio A para as seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x + 1$ (b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(c) $f(x) = \frac{2x-5}{1-x}$ (d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

(e) $f(x) = |3 - x| - 1$ (f) $\sqrt{\frac{x}{10}}$

44. Seja $f : A \to [0, 1]$. Determine o domínio A, quando f é dada por:

(a) $f(x) = 3x - 1$ (b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(c) $f(x) = -x^2 + x + 2$ (d) $f(x) = \frac{1-x}{3-x}$

45. As funções $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : I\!R \to I\!R$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.

46. As funções f e g, cujas regras são dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Explique.

47. As funções

$$\begin{array}{rcl} f : I\!R & \longrightarrow & I\!R \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} f : I\!R - \{1\} & \longrightarrow & I\!R \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

são iguais? Explique.

48. Uma função f com domínio $A \subset I\!R$ é *par* se $f(-a) = f(a)$ para todo a em A tal que $-a \in A$, e *ímpar* se $f(-a) = -f(a)$. Determine em cada alternativa abaixo se f é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.

(a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ (b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$ (c) $f(x) = 9 - 5x^2$

(d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ (e) $f(x) = -2$ (f) $f(x) = 2x^3 + x^2$

(g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-4}$

(j) $f(x) = |x| + 5$ (k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (l) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

49. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ considere as funções $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $q(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que p é par e que q é ímpar.

50. Classifique as funções seguintes como injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.

(a) $f : I\!R \to I\!R$ tal que $f(x) = 2x - 1$
(b) $g : I\!R \to I\!R_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
(c) $h : I\!R \to I\!R_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
(d) $m : I\!N \to I\!N$ tal que $m(x) = 3x + 2$
(e) $p : I\!R^* \to I\!R^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$ (onde $I\!R^* = I\!R - \{0\}$)
(f) $q : I\!R \to I\!R$ tal que $q(x) = x^3$
(g) $r : I\!R \to I\!R$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$

51. Seja $f : A \to [-9, -1[$ dada por $f(x) = \dfrac{3+4x}{3-x}$. Pede-se:

(a) Determinar A.
(b) Mostrar que f é injetora.
(c) Verificar se f é sobrejetora.

52. Seja $f : A \to]1, 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4-11x}{4-2x}$. Pede-se:

(a) Determinar A.
(b) Mostrar que f é injetora.
(c) Verificar se f é sobrejetora.

53. Se $f(x) = 4x - 3$ mostre que $f(2x) = 2f(x) + 3$.

54. Encontre a inclinação e a intersecção vertical da reta cuja equação é $2y + 5x - 8 = 0$.

55. Em cada item a seguir encontre a equação da reta que passa pelo par de pontos

(a) (3,2) e (-2,4) (b) (1,1) e (2,-2)
(c) (-3,-3) e (4,9) (d) (-1,-3) e (-2,5)
(e) (0,0) e (3,2) (f) (5,0) e (0,5)
(g) (-2,-3) e (5,-7) (h) $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$
(i) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

56. Nos itens de abaixo, encontre os valores de x para os quais a inclinação da reta ligando os dois pontos dados:

(i) é zero (ii) não existe (iii) é positivo (iv) é negativo

(a) (2,3) e $(x, 5)$ (b) (6,-1) e $(3, x)$
(c) $(4, x)$ e $(x, 2)$ (d) $(-6, x^2)$ e $(x^2, -2)$

57. Determine se a reta passando pelos dois primeiros pontos é paralela à reta passando pelos dois últimos

(a) (6,2) e (0,2); (5,1) e (12,10) (b) (-2,-4) e (-4,1); (7,4) e (-3,19)
(c) (6,-1) e (11,1); (5,-2) e (20,4) (d) (-1,4) e (7,1); (4,2) e (15,-2)

58. Nos itens a seguir encontre a equação da reta que possui inclinação m, e que passa pelo ponto dado.

(a) $m = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ (b) (-2,5), $m = -\frac{2}{3}$
(c) $m = 1$, $(-4, -3)$ (d) $m = -1$, $(-3, -3)$
(e) (0,3), $m = -2$ (f) (3,0), $m = 2$
(g) (-4,3), $m = 0$ (h) (1,-3), $m = 0$

59. Nos itens a seguir, determine a inclinação e as intersecções com os eixos x e y das funções definidas pelos gráficos:

(a) $\{(x, y) \,|\, 3x + 4y - 6 = 0\}$ (b) $\{(x, y) \,|\, x - 2y + 4 = 0\}$
(c) $\{(x, y) \,|\, -4x + 5y + 12 = 0\}$ (d) $\{(x, y) \,|\, 2x + y = 0\}$

60. O gráfico de uma função linear, f, tem coeficiente angular $m = 2$. Se $(-1, 3)$ e $(c, -2)$ pertencem ambos ao gráfico de f, encontre o número c.

61. Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação.

(a) $3x + y - 1 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$
(b) $-2x + 3y - 6 = 0$ e $-2x + 3y + 3 = 0$
(c) $-2x + 5y + 30 = 0$ e $5x + 2y - 2 = 0$
(d) $-x + y - 2 = 0$ e $x + y - 2 = 0$
(e) $y - 3x = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$
(f) $y + x + 1 = 0$ e $2y + 2x + 1 = 0$

62. (a) Qual a equação da reta que passa pelos pontos $(0, 3)$ e $(5, 0)$?
(b) Mostre que a equação da reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$ pode ser escrita na forma (chamada forma *segmentária*):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (a \cdot b \neq 0)$$

63. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2,1)$ e que é perpendicular à reta $y = 5x + 3$.

64. Encontre a equação das retas paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$ e que passa pelo ponto $(1,5)$.

65. Seja $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = \dfrac{3x-1}{4}$. Para que valores do domínio a imagem é menor que 4?

66. Para que valores de $x \in I\!R$ a função $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ é negativa?

67. O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um *custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de *custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R$ 10.000,00 e os custos variáveis de R$ 200,00 por hectare. Seja C o custo total, calculado em milhares de reais, e x o número de hectares plantados.

(a) Encontre uma fórmula para C em função de x.
(b) Esboce o gráfico de C *versus* x.
(c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico.

68. Pimentas picantes foram graduadas de acordo com as unidades de Scoville, em que o nível máximo de tolerância humana é de 14.000 Scovilles por prato. O Restaurante Costa Oeste, conhecido por seus pratos picantes, promete um prato especial do dia, que irá satisfazer ao mais ávido aficcionado por pratos apimentados. O restaurante importa pimentas indianas, graduadas em 1.200 Scovilles cada, e pimentas mexicanas, com uma graduação de 900 Scovilles cada.

(a) Determine a equação de restrição de Scoville, relacionando o número máximo de pimentas indianas e mexicanas que o restaurante deve utilizar na composição do prato especial.
(b) Resolva a equação da parte (a) obtenha, explicitamente, o número de pimentas indianas usadas nos pratos mais picantes em função do número de pimentas mexicanas.

69. Um corpo de massa m está caindo com velocidade v. A segunda Lei de Newton do Movimento $F = ma$, estabelece que a força resultante, F, com sentido para baixo, é proporcional à sua aceleração, a. A força resultante, F, é composta pela Força de gravidade F_g, que age para baixo, menos a força de resistência do ar F_r, que age para cima. A força devida à gravidade é mg, onde g é uma constante. Suponha que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do corpo.

(a) Obtenha uma expressão para a força resultante F, em função da velocidade v.
(b) Obtenha uma fórmula, dando a em função de v.
(c) Esboce o gráfico de a *versus* v.

70. Encontre o comprimento do segmento da reta $3x+4y = -12$ que está entre as interseções horizontal e vertical.

71. Valores correspondentes a p e q são dados na tabela a seguir:

p	1	2	3	4
q	950	900	850	800

(a) Determine q como uma função linear de p.
(b) Determine p como função linear de q.

72. Uma função linear foi utilizada para gerar os valores da tabela a seguir. Encontre esta função.

x	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
y	27,8	29,2	30,6	32,0	33,4

Respostas:

1. (a) 0.7 (b) 0.4 (c) 0.6 (d) -0.875 (e) -0.85 (f) 0.3636... (g) $-1.14285143...$ (h) -4

2. (a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{-18}{5}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $\frac{2}{11}$ (e) $\frac{19}{198}$ (f) $\frac{36}{11}$ (g) $\frac{76}{55}$ (h) $-\frac{413}{99}$ (i) $\frac{2470}{999}$ (j) $\frac{271}{165}$ (k) $\frac{6}{7}$ (l) $\frac{50}{37}$

3. $L = 2800m$

4. Sim. Por exemplo, o número 0.123456789101112131415...

5. (a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{51}{50}$ (c) $\frac{187}{50}$ (d) 6

6. (a) Verdadeira.

(b) Falsa. Contra-exemplo: $a = \sqrt{2}$ e $b = 1 - \sqrt{2}$ são irracionais, mas $a + b = 1 \in \mathbb{Q}$.

(c) Verdadeira.

(d) Verdadeira.

(e) Falsa. Contra-exemplo: $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{8}$ são irracionais, mas $ab = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$.

(f) Falsa. Contra-exemplo: $a = \sqrt{2}$ é irracional, mas $a^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

(g) Verdadeira.

(h) Verdadeira.

(i) Falsa. Contra-exemplo: $a = 0, b = 1, c = 2$, pois $0 * 1 = 0 * 2$ mas $1 \neq 2$.

(j) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1, b = 3, c = 2$, pois $(-1) * 3 < (-1) * 2$ mas $3 > 2$.

(k) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1, b = 0$, pois $(-1) < 0$ mas $(-1)^2 > 0^2$.

(l) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1, b = 1$, pois $(-1)^2 = 1^2$ mas $(-1) \neq 1$.

(m) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1, b = 3$, pois $-1 < 3$ mas $\frac{1}{-1} < \frac{1}{3}$.

(n) Falsa. Contra-exemplo: $a = 0.5$, pois nesse caso $a^2 < a$.

(o) Verdadeira.

(p) Verdadeira.

(q) Verdadeira.

(r) Falsa. Contra-exemplo: $a = -3, b = 1$, pois $|-3| \geq 1$ mas $-3 < 1$.

7.

(a) Verdadeira
(b) Verdadeira
(c) Verdadeira
(d) Falsa
(e) Falsa
(f) Verdadeira
(g) Verdadeira
(h) Verdadeira
(i) Verdadeira

8. (a) 9
(b) -1
(c) 3
(d) $2+2\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$
(e) $8-2\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$
(f) 1
(g) 4

14. $x = 0$.

16. (a) $(-2, 16)$
(b) $\left[\dfrac{-13}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$
(c) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$
(d) $\left[-\dfrac{3}{2}, 0\right]$
(e) $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$
(f) $[-2, 4] - \{-1, 3\}$

18. (a) $(3, +\infty)$
(b) $[-3, +\infty)$
(c) $\left[2, \dfrac{5}{2}\right]$
(d) $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right]$
(e) $(0, +\infty)$
(f) $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$

20. (a) $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. O trinômio é negativo para $x \in (-1, 3)$.
(b) $x^2 + x - 42 = (x+7)(x-6)$. O trinômio é negativo para $x \in (-7, 6)$.
(c) $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$. O trinômio é negativo para $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.
(d) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. O trinômio é negativo para $x \in (-3, 3)$.
(e) $16x^2 - 2x = 2x(8x-1)$. O trinômio é negativo para $x \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$.
(f) $x^2 + 3x = x(x+3)$. O trinômio é negativo para $x \in (-3, 0)$.
(g) $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$. O trinômio nunca é negativo.
(h) $x^2 + 1$. O trinômio nunca é negativo.
(i) $-x^2$. O trinômio é negativo para $x \in \mathbb{R}$
(j) $-x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1$. O trinômio é negativo para $x \in \mathbb{R}$
(k) $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$. O trinômio nunca é negativo.
(l) $2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8}$. O trinômio nunca é negativo.
(m) $x^2 + x - 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$. O trinômio é negativo para $x \in \left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

21.

(a) $x \in (0, 3) \cup (6, +\infty)$

(b) $x \in (-5, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

(c) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

(d) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

(e) $x \in [-\sqrt{2}, 1) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

(f) $x \in (-\infty, 1)$

(g) $x \in \mathbb{R}$

(h) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$

(i) $x \in (-\infty, -4) \cup [-3, 2]$

(j) $x \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right] \cup [4, +\infty)$

23. $|x - 5| < 5$.

26. Sim.

27. (a) Não é função de A em B.

(b) É função nem injetora nem sobrejetora de A em B.

(c) É função bijetora de A em B.

(d) Não é função de A em B.

(e) É nem injetora nem sobrejetora função de A em B.

(f) Não é função de A em B.

(g) É função nem injetora nem sobrejetora de A em B.

(h) É função bijetora de A em B.

(i) É função nem injetora nem sobrejetora de A em B.

28. (a) É função, não é injetora nem sobrejetora.

(b) Não é função.

(c) É função bijetora.

(d) É função, não é injetora nem sobrejetora.

(e) É função, não é injetora nem sobrejetora.

(f) É função sobrejetora, porém não injetora.

29. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $A = \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$.

30. $y = \sqrt{a^2 - 4x^2}$, $A = x\sqrt{a^2 - 4x^2}$.

31. $L = \dfrac{ah}{a + h}$.

32. (b) $TI(20) = 130$ e $TE(20) = 110$

(c) $n = 10$

(d) $n = 16$

(e) $n = 4$

(f) Nunca ocorre.

(g) $TI(n) = 30 + 5n$

(h) $TE(n) = 50 + 3n$

33. (a) $f(a) = 6$ (b) $f(a) = -1$ (c) $f(a) = \dfrac{4}{7}$ (d) $f(a) = \dfrac{1}{3}$

34. $f(1) = 2$, $f(-1) = -8$, $f(0) = -3$, $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{-7}{8}$, $f(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 3$.

35.

(a) $\dfrac{a^2}{1+4a^2}$
(b) a^2+4
(c) $\dfrac{1}{a^4+4}$
(d) $\dfrac{1}{a^4+8a^2+16}$
(e) $\dfrac{1}{a+4}$
(f) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}$

36. (a) $x+a$ (b) x^2+ax+a^2 (c) $\dfrac{-1}{ax}$ (d) $4(x+a)(x^2+a^2)$

41. (a) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (b) $\dfrac{x+1}{x-1}$ (c) $\dfrac{2}{x}-1$ (d) x

42. (a) $[-5,+\infty)$
(b) $[-2,2]$
(c) $(-1,2]$
(d) $(-5,\dfrac{3}{2}]$
(e) $[-1,5]$
(f) $(-\infty,-1]\cup[0,1]$
(g) $(-\sqrt{2},0]$
(h) $[-3,-1)\cup[1,+\infty)$

43. (a) $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$
(b) $(0,2]\cup[3,+\infty)$
(c) $\left(1,\dfrac{5}{2}\right]$
(d) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
(e) $(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$
(f) $[0,+\infty)$

44. (a) $[1/3,2/3]$
(b) $(0,+\infty)$
(c) $\left[-1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},2\right]$
(d) $(-\infty,1]$

45. Não. Elas são iguais apenas para $x \geq 0$.

46. Sim, por exemplo se restringirmos o domínio a $\{x \in I\!R \mid x \geq 1\}$.

47. Não, pois possuem domínios diferentes.

48. (a) Ímpar.
(b) Par.
(c) Par.
(d) Ímpar.
(e) Par.
(f) Nem par nem ímpar.
(g) Nem par nem ímpar.
(h) Par.
(i) Nem par nem ímpar.
(j) Par.
(k) Par.
(l) Ímpar.

50. (a) Bijetora.
(b) Nem injetora nem sobrejetora.
(c) Injetora.
(d) Bijetora.
(e) Bijetora.
(f) Bijetora.
(g) Nem injetora nem sobrejetora.

54. A inclinação é $-\dfrac{5}{2}$ e a intersecção com o eixo y se dá em $(0,4)$.

55. (a) $5y+2x-16=0$
(b) $y+3x-4=0$
(c) $7y-12x-15=0$
(d) $y+8x+11=0$
(e) $3y-2x=0$
(f) $y+x-5=0$
(g) $7y+4x+29=0$
(h) $23y+40x-54=0$
(i) $12y-3x-2=0$

56. (a) i) nunca, ii) $x = 2$, iii) $x > 2$, iv) $x < 2$.

(b) i) $x = -1$, ii)nunca, iii) $x < -1$, iv) $x > -1$.

(c) i) $x = 2$, ii) $x = 4$, iii) $x \in (2, 4)$, iv) $x \in \mathbb{R} - [2, 4]$.

(d) i), ii) e iii) nunca, iv) $\mathbb{R}$.

57. (a) Não. (b) Não. (c) Sim. (d) Não.

58. (a) $6y - 3x - 17 = 0$

(b) $3y + 2x - 11 = 0$

(c) $y - x - 1 = 0$

(d) $y + x + 6 = 0$

(e) $y + 2x - 3 = 0$

(f) $y - 2x + 6 = 0$

(g) $y = 3$

(h) $y = -3$

59. (a) $-\frac{3}{4}$; $(0, \frac{3}{2})$ e $(2, 0)$

(b) $\frac{1}{2}$; $(0, 2)$ e $(-4, 0)$.

(c) $\frac{4}{5}$; $(0, -\frac{12}{5})$ e $(3, 0)$.

(d) -2; $(0, 0)$ e $(0, 0)$.

60. $c = -\frac{7}{2}$.

61. (a) $p = (0, 1)$

(b) $\emptyset$

(c) $p = \frac{1}{29}(70, -146)$

(d) $p = (0, 2)$

(e) $\emptyset$

(f) $\emptyset$

62. (a) $5y + 3x - 3 = 0$.

65. $x < \frac{17}{3}$

66. $x > \frac{4}{3}$

67. (a) $C(x) = 200x + 10000$.

70. $L = 5$.

71. (a) $q(p) = 1000 - 50p$.

(b) $p(q) = 20 - \frac{q}{50}$.

72. $y = 14x - 45$.