# ÁLGEBRA LINEAR

## CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:
**Fernando de Ávila Silva**
Departamento de Matemática - UFPR

## LISTA: Processo de Gram-Schmidt e Matrizes Ortogonais

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Amplicações* de Steven J. Leon.

---

**Definição 1** *Uma matriz real $Q_{n\times n}$ é dita ortogonal se seus vetores colunas formam uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{R}^n$.*

---

(1) Quais são as condições para que a matriz real abaixo ser ortogonal?

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(2) Quais das matrizes abaixo são ortogonais?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/5 & 5/13 \\ 4/5 & 12/13 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

(3) Mostre que se uma matriz real $Q_{n\times n}$ é ortogonal, então $\det(Q) = 1$ ou $\det(Q) = -1$. (Dica qual é a inversa da matriz Q?)

---

**Teorema 1** *Se $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço $V$, então dado qualquer $v \in V$ temos que*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \quad \textit{sendo} \quad \alpha_j =< v, v_j >$$

---

(4) Considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right), \; u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{e} \quad u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

(a) Mostre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$;

(b) Escreva o vetor $v = (1, 1, 1)$ como combinação linear de $u_1$, $u_2$ e $u_3$ utilizando o teorema (1);

(5) Seja $\theta$ um número real fixo e os vetores $x_1 = (cos(\theta), sen(\theta))$ e $x_2 = (-sen(\theta), cos(\theta))$.

(a) Mostre que $\{x_1, x_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$;

(b) Escreva um vetor arbitrário $y$ como $c_1x_1 + c_2x_2$;

(c) Mostre que $c_1^2 + c_2^2 = ||y||^2$;

(6) Suponha $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base ortonormal de um espaço $V$ e

$$u = u_1 + 2u_2 + u_3 \quad \text{e} \quad v = u_1 + 7u_3.$$

Calcule:

(a) $< u, v >$;

(b) $||u||$ e $||v||$;

---

**Definição 2** *Dado um espaço vetorial $V$ com produto interno e um conjunto linearmente independente $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o processo de ortogonalização Gram-Schmidt permite construir um conjunto $\mathcal{A}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ ortogonal. Mais ainda, temos $[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}']$. Os vetores $w_j$ são construídos da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{||w_1||^2} w_1 \\ &\vdots \\ w_{k+1} &= v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{< v_{k+1}, w_j >}{||w_j||^2} w_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

---

(7) Aplique o processo de Gram-Schmidt para os vetores

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \; u_2 = (-1, 4, 4, -1), \; \text{e} \; u_3 = (4, -2, 2, 0).$$

(8) Dada a base $\{(1, 2, -2), (4, 3, 2), (1, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, obtenha uma **ortonormal**.

(9) Considere o espaço $C([-1, 1])$ munido com o produto interno

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Obtenha um conjunto **ortonormal** a partir do conjunto $\{1, x, x^2\}$.