

Processo Seletivo Estendido 2016
LISTA FUNÇÕES - 4

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

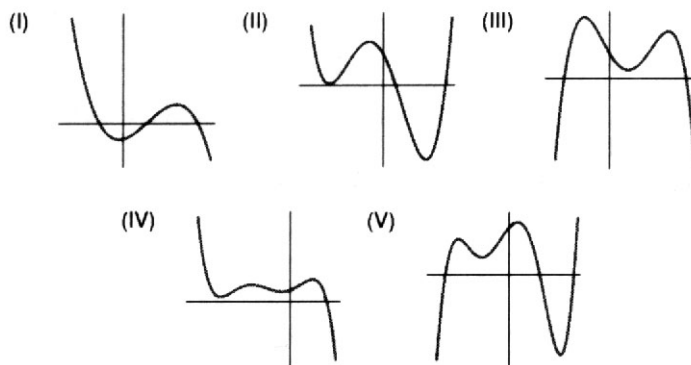
Esta lista foi inicialmente elaborada pelo professor Alexandre Trovon (UFPR).

A presente versão possui também algumas alterações feitas pelo professor Lucas Pedroso (UFPR)

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que deem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

-
1. Se $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x^4$ e $h(x) = x^2 + x^4 + x^6$ e $k(x) = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ encontre números reais a , b e c tais que $k = af + bg + ch$.
 2. Em cada caso, determine (caso exista) um polinômio do segundo grau $f(x)$ de modo que:
(a) $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$. (b) $f(1) = 0$ e $f(x) = f(x - 1)$
para todo x
 3. Nos itens a seguir, fatore o polinômio o máximo possível (utilizando apenas termos reais).
(a) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ (b) $p(y) = 2y^3 + 3y^2 - 8y + 3$
(c) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$ (d) $p(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$.
(e) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ (f) $p(x) = x^3 - 27$
(g) $p(x) = x^4 - 1$ (h) $p(y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$
(i) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 8x$ (j) $p(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$
(k) $p(x) = -2x^4 + 7x^2 - 3$ (l) $p(x) = x^2 - 4$
(m) $p(x) = x^2 - 3$
 4. Determine os números a e b de modo que o polinômio $f(x) = x^4 - 3ax^3 + (2a - b)x^2 + 2bx + (a + 3b)$ seja divisível por $g(x) = x^2 - 3x + 4$.
 5. Determinar p e q de modo que $x^4 + 1$ seja divisível por $x^2 + px + q$.
 6. Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e por $x^2 + rx + s$ prove que $b = -r(a + r)$.
 7. Determinar a de modo que a divisão de $x^4 - 2ax^3 + (a + 2)x^2 + 3a + 1$ por $x - 2$ tenha resto 7.
 8. Determinar um polinômio do terceiro grau que se anula em $x = 1$ e que dividido por $x + 1$, $x + 2$ e $x - 2$ tenha resto 6.

9. Qual deve ser o valor do coeficiente c para que os restos da divisão de $x^{10} + ax^4 + bx^2 + cx + d$ por $x + 12$ e $x - 12$ sejam iguais?
10. As divisões de um polinômio $f(x)$ por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ são exatas. O que se pode dizer do grau de f ?
11. O gráfico de cada uma das figuras abaixo representa um polinômio. Para cada um deles determine:
 (a) qual o menor grau possível do polinômio.
 (b) O coeficiente líder do polinômio é positivo ou negativo? (O coeficiente líder é o coeficiente da potência mais alta de x .)



12. Esboce o gráfico dos seguintes polinômios:

(a) $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

(b) $f(x) = 5(x^2 - 4)(x^2 - 25)$

(c) $f(x) = -5(x^2 - 4)(25 - x^2)$

(d) $f(x) = 5(x - 4)^2(x^2 - 25)$

13. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, o que você pode dizer de a , b e c se:

(a) $(1,1)$ está no gráfico de $f(x)$?

(b) $(1,1)$ é o vértice do gráfico de $f(x)$?

(c) A intersecção do gráfico com o eixo dos y é $(0,6)$?

(d) Encontre uma função quadrática que satisfaça todas as três condições anteriores.

14. Encontre um polinômio cujas raízes sejam -2 , -1 , 1 e 4 , todas com multiplicidade 1.

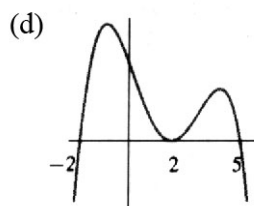
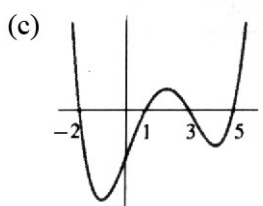
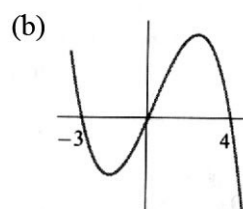
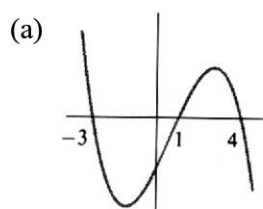
15. Em cada caso, encontre um polinômio com coeficientes inteiros cujas raízes sejam:

(a) $\sqrt{2} + 1$ e $\sqrt{2} - 1$.

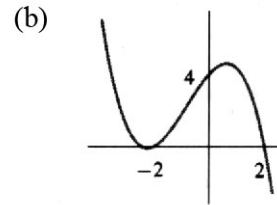
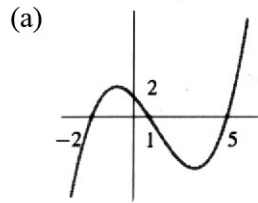
(b) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

(c) $\sqrt{6}$, $1 - \sqrt{5}$ e -1 .

16. Para cada um dos itens a seguir: encontre uma possível fórmula para o gráfico; obtenha os intervalos aproximados onde a função é crescente e onde é decrescente.



17. Encontre os polinômios cúbicos que representam o gráfico de:



18. Encontre todas as raízes racionais dos seguintes polinômios

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ (b) $f(x) = x^3 + 8$

(c) $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{6}$ (d) $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2$.

19. Quais as possíveis raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

20. Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Respostas:

1. $a = 8, b = -9, c = 3$.

2. (a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

(b) Não existe.

3. (a) $2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 + 2x + 3)$

(g) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

(b) $2(x - 1)(x + 3) \left(x - \frac{1}{2} \right)$

(h) $\frac{1}{12}(x - 2)(x + 1) \left(x - \frac{1}{2} \right)$

(c) $2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 + 2x - 2)$

(i) $x(x^3 - 2x^2 - 4x - 8)$

(d) $(x - 3)(x + 1)(x^2 + 2x + 2)$

(j) $(x - 1)x(x + 1)(x + 3)$

(e) $(x - 3)(x^2 - 4x - 4)$

(k) $-2(x^2 - 3) \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)$

(f) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

(l) $(x - 2)(x + 2)$

(m) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

4. $a = -\frac{2}{27}$ e $b = \frac{147}{27}$

5. $p = 2^{1/3}$ e $q = 2^{-1/3}$

7. $a = 2$

8. $p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$

9. $c = 0$

10. Que 1, 2 e 3 são raízes de f .

11. (I) (a) 3. (b) negativo.

(IV) (a) 5. (b) negativo.

(II) (a) 4. (b) positivo.

(III) (a) 4. (b) negativo.

(V) (a) 5. (b) positivo.

13.

(a) $a + b + c = 1$.

(b) $b = -2a = 2 - 2c$.

(c) $c = 6$.

(d) $f(x) = 5x^2 - 10x + 6$.

14. $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$.

15. (a) $x^4 - 6x^2 + 1$.

(b) $x^4 - 10x^2 + 1$.

(c) $x^5 - x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 36x + 24$.

16. (a) $f(x) = -(x + 3)(x - 1)(x - 4)$.

(b) $f(x) = -x(x + 3)(x - 4)$.

(c) $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$.

(d) $f(x) = -(x + 2)(x - 2)^2(x - 5)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - \frac{7}{5}x + 2$.

(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4$.

18. (a) 2.

(b) -2.

(c) Não existe.

(d) Não existe.

19. -1, 1, 2.

20. $x = -1$, $x = 1$ ou $x = 2$.