Processo Seletivo Estendido 2016
LISTA FUNÇÕES - 10

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista foi inicialmente elaborada pelo professor Lucas Pedroso (UFPR). Ela também contém exercícios retirados do livro: *Trigonometria, Números Complexos - SBM - Coleção do Professor de Matemática.*

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que deem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

---

1. Sejam $a = 3 - 2i$, $b = -1 + 3i$, $c = 2 + 2i$ e $d = i$. Calcule:

(a) $a + 2b$ (b) $c + d$ (c) $a \cdot b$ (d) $c \cdot d$ (e) a^{-1} (f) c/b (g) b/c
(h) d^{-1} (i) a/d (j) $a \cdot c$ (k) $a \cdot \overline{b}$ (l) $|b - c|$ (m) d^{2017} (n) $a + b + c + d$

2. Resolva as equações abaixo, considerando as possíveis soluções comlexas.

(a) $x^2 = -1$ (b) $x^2 + 5 = 0$ (c) $x^2 - 2x + 8 = 0$ (d) $3x^2 + 2x + 1 = 0$
(e) $x^2 - 4x + 8 = -0$ (f) $x^2 - 8x + 5 = 0$ (g) $x^2 + 2ix - 2 = 0$ (h) $x^2 + ix + 2 = 0$

3. Obtenha a forma polar dos números abaixo.

(a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ (b) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$ (c) $z = 1 - -i$ (d) $z = -3 - i3\sqrt{3}$
(e) $z = -2i$ (f) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ (g) $z = -5\sqrt{3} + -5i$ (h) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Resolva as equações abaixo:

(a) $2z + \frac{\overline{z}}{2} = 3i + 2$ (b) $2z + -3z = 2i$ (c) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$ (d) $z\overline{z} = 1$

5. Obtenha a forma algébrica dos números abaixo.

(a) $(-1 + i)^{20}$ (b) $(-1 - \sqrt{3}i)^8$ (c) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)^4$ (d) $\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^6$
(e) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ (f) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2$ (g) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^7$ (h) $\left(-\sqrt{3} - i\right)^{10}$

6. Obtenha todas as soluções das equações abaixo e as represente no plano complexo.

(a) $x^4 = 16$ (b) $x^3 = 8i$ (c) $x^4 = -81$ (d) $x^2 = -18 + 18\sqrt{3}$
(e) $x^8 = 256$ (f) $x^6 = 8$ (g) $x^6 = -1728$ (h) $x^8 = 1$

7. Calcule

(a) i^{20} (b) i^{72} (c) i^{1041} (d) i^{100}
(e) i^{207} (f) $(1 + i)^{20}$ (g) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{10}$ (h) $1 + i + i^2 + \ldots + i^{1992}$

8. Sendo n um número inteiro, que valores pode ter $i^n + i^{-n}$?

9. Determine $a \in I\!R$ tal que $\dfrac{a + i}{1 + ai}$ seja um número real.

10. Prove as seguintes afirmações

(a) $\overline{\overline{z}} = z$;

(b) se $z \neq 0$, então $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;

(c) se $z \neq 0$, então $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$;

(d) se $z \neq 0$, então $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;

(e) se $z \neq 0$, então $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$;

(f) se $|z| = 1$, então $\frac{1}{z} = \overline{z}$;

(f) se $\frac{1}{z} = \overline{z}$, então $|z| = 1$;

11. Suponha que $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$. Prove que se z é uma solução complexa da equação

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{com} \quad a_j \in I\!R,$$

então $\overline{z}$ também é uma solução desta equação.

12. Seja P um polinômio de coeficientes reais tal que $P(1-i) = 2+3i$. Determine $P(1+i)$.

13. Mostre que se $z = |z|(cos(\theta) + i(\theta))$ então $\overline{z} = |z|(cos(-\theta) + i(-\theta))$.

14. Admitindo a fórmula $e^{ix} = cos(x) + isen(x)$:

(a) Calcule $e^{2\pi i}$;

(b) Calcule $e^{\pi i/4}$;

(c) Prove que

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

15. Mostre que se z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero, então $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$.