

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Nome:

GRR:

- Não serão aceitas respostas sem justificativas.
- Não é necessário responder com caneta;
- Cada questão tem valor igual a 20 pontos;

(Questão 1) Sejam U e V dois espaços vetoriais e uma função $L : U \rightarrow V$.

- (a) Quais são as condições para L ser uma transformação linear?
- (b) Verifique se as seguintes funções são transformações lineares:
 - (I) $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $L((x, y)) = (x, y, x + 2y)$;
 - (II) $L : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, com $L(A) = A + I$, sendo I a matriz identidade em $\mathbb{R}^{n \times n}$;

(Questão 2) Fixadas as bases

$$E = \{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (-1, 1, 1)\} \text{ e } F = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

dos espaços \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , respectivamente, obtenha:

- (a) a matriz $[T]_{E,F}$ da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y, z)) = (x + y, x - z)$;
- (b) a matriz $[L]_{E,F}$ da transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L((x, y, z)) = (z, x)$;

(Questão 3) Sejam $T, L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ as transformações lineares

$$T((x, y, z)) = (z, y, x) \text{ e } L((x, y, z)) = (x, x, x).$$

- (a) Obtenha $\text{Nuc}(T)$ e $\text{Nuc}(L)$;
- (b) T é injetiva? L é injetiva? Justifique.

(Questão 4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule o polinômio característico de A ;
- (b) Obtenha os autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 da matriz A ;
- (c) Obtenha autovetores v_1 , v_2 e v_3 associados a λ_1 , λ_2 e λ_3 , respectivamente;

(Questão 5) Duas matrizes $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ são ditas semelhantes se existe outra matriz $X_{n \times n}$ tal que $A = X^{-1} \cdot B \cdot X$.

- (a) Mostre que se $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ são semelhantes, então $\det(A) = \det(B)$;
- (b) Mostre que se $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ são semelhantes, então A é inversível se, e somente se, B é inversível;

(Questão 6) Considere um espaço vetorial V de dimensão finita e a função $I : V \rightarrow V$ definida por $I(v) = v$.

- (a) Mostre que I é uma transformação linear;
- (b) Obtenha a representação matricial de I ;

(Questão 7) Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$, sendo V um espaço vetorial de dimensão 5, tem como polinômio característico o polinômio

$$p(x) = (x - 5)^2(x + 4)(x - 3)(x - 2).$$

Sob qual condição a transformação linear T é diagonalizável?