CM 005 - Terceira Prova - 29 / 06

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Nome: GRR:

- Não serão aceitas respostas sem justificativas.
- Não é necessário responder com caneta;
- Cada questão tem valor igual a 20 pontos;
- O produto interno entre dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definido por

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{sendo} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

  Segue deste produto interno a norma

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

- Dado um espaço vetorial V, com produto interno, e um conjunto linearmente independente $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ podemos construir um conjunto ortogonal $\mathcal{A}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ da seguinte forma:

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{||w_1||^2} w_1, \ \dots, \quad w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{< v_{k+1}, w_j >}{||w_j||^2} w_j, \dots,$$

- Se $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base **ortonormal** de um espaço V, então dado qualquer $v \in V$ temos que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \quad \text{sendo} \quad \alpha_j =< v, v_j >;$$

(Questão 1) Faça o que se pede.

(a) Num espaço vetorial V com produto interno, qual é a definição de vetores ortogonais?

(b) Verifique quais dos seguintes pares de vetores são ortogonais:

(b_1) $x = (2, 1, 3)$ e $y = (6, 3, 9)$; (b_2) $u = (2, -3)$ e $v = (3, 2)$;

(Questão 2) Obtenha o ponto mais próximo de $(5, 2)$ pertencente a reta $y = 3x$. (Obs: Utilize projeção ortogonal);

(Questão 3) Construa um conjunto ortogonal $\mathcal{A}' = \{w_1, w_2\}$ a partir do conjunto l.i. $\mathcal{A} = \{(1, 2, -2), (1, 2, 1)\}$;

(Questão 4) Considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}} \right), \ u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad \text{e} \quad u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

(a) Mostre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto **ortonormal** de $\mathbb{R}^3$;

(b) Escreva o vetor $v = (1, 0, 0)$ como combinação linear de u_1, u_2 e u_3;

(Questão 5) Suponha $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base **ortonormal** de um espaço V,

$$u = u_1 + 2u_2 + u_3 \quad \text{e} \quad v = u_1 + 7u_3.$$

Calcule o produto interno $< u, v >$ e a norma $||v||$;

(Questão 6) Uma matriz $A_{3\times 3}$ tem a seguinte propriedade: existe uma matriz $Q_{3\times 3}$ tal que

$$A = Q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot Q^{-1}.$$

Calcule A^{2016}, supondo que a matriz Q é ortogonal;

(Questão 7) Sejam u e v dois vetores em $\mathbb{R}^2$;

(a) Mostre que se u e v são não nulos e ortogonais, então eles são linearmente independentes;

(b) Mostre que se u e v são ortogonais, então $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$;