CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

Exercício 1 *Considere* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *constantes complexas e o polinômio*

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Mostre que se $p(z_0) = 0$*, então existe um polinômio* g *tal que* $p(z) = (z - z_0)g(z)$*. Conclua que* p *possui no máximo* n *raízes.*

Exercício 2 *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *mostre que:*

(a) $sen^2(z) + cos^2(z) = 1$;

(b) $sen(-z) = -sen(z)$ e $cos(-z) = cos(z)$

(c) $sen(z + w) = sen(z)cos(w) + cos(z)sen(w)$ e $cos(z + w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w)$;

Exercício 3 *Considere as funções complexas*

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad e \quad senh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Verifique quais dos itens do exercício anterior continuam válidos.

Exercício 4 *Considere a função* $f(z) = e^z$.

(a) Mostre que f transforma a reta vertical $R = \{z \in \mathbb{C};\, Re(z) = a\}$ no círculo $C = \{z \in \mathbb{C};\, |z| = e^a\}$;

(b) Mostre que f transforma a reta horizontal $S = \{z \in \mathbb{C};\, Im(z) = b\}$ na semi-reta $L = \{z \in \mathbb{C};\, z = re^{ib},\ r > 0\}$;

Exercício 5 *Estude o limite* $\lim_{n\to\infty} z^n$.

Exercício 6 *Calcule:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(i^{n!} + 2^n)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{in^3 + 1}{2^3 + n^2}$;

(c) $\lim_{z\to i} \dfrac{4z + i}{z + 1}$;

(d) $\lim_{z\to z_0} \sqrt{z}$;

Exercício 7 *Dizemos que uma sequência* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy quando: dado* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n, m \geqslant n_0$ *implica em* $|z_n - z_m| < \epsilon$*. Mostre que* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy se, e somente se,* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

Dica: Existe um resultado similar para sequências em $\mathbb{R}$.

Exercício 8 *Dizemos que um conjunto* $K \subset \mathbb{C}$ *é compacto quando é limitado e fechado. Mostre que se* $f : K \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua, então existem* $\alpha, \beta \in K$ *tais que*

$$f(\alpha) \leqslant f(z) \leqslant f(\beta), \ \forall z \in K.$$

Exercício 9 *Suponha* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que*

(i) $|f(z)| \to \infty$*, quando* $|z| \to \infty$*,*

(ii) $f(\mathbb{C})$ *é um conjunto aberto.*

Mostre que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$*.*