CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5

Exercício 1 *Mostre que as seguintes séries convergem uniformemente no disco $D(0,1)$. (Use o teorema apresentado em sala o qual é uma variação do teste M de Weiertrass)*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ncos(3n)}{1+5n} z^n$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3cos(n)}{10n^2+7} z^{2n-1}$$

Exercício 2 *Mostre que*

(a)
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \ |z| < 1.$$

(b)
$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \ |z| < 1.$$

Exercício 3 *Obtenha o raio de convergência das séries:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 1}{n} z^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n} (z-1)^n$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3i}\, n} z^n$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n z^n$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2i}}{2^n} (z-\pi)^n$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$;

Exercício 4 *Suponha que as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ convergem no disco $D(z_0, r)$. Mostre que se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

para cada $z \in D(z_0, r)$, então $a_n = b_n$ para todo n.

Exercício 5 *Considere uma função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definida no disco $D(z_0, r)$.*

(a) Mostre que se f é uma função par, então $a_n = 0$ para todo n ímpar (Vale a volta?);

(b) Mostre que se f é uma função ímpar, então $a_n = 0$ para todo n par (Vale a volta?);

(c) Se $f(z_0) \neq 0$, então quais devem ser os coeficientes de $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$? (Este item não depende dos dois anteriores.)