CM 068 - variáveis Complexas
Professor:
**Fernando de Ávila Silva**
Departamento de Matemática - UFPR

---

## PROVA 2 - 17/05/2017

1. Todas as respostas devem ser justificadas.
2. Cada questão tem valor de 20 pontos. Resolva apenas 5 questões.
3. Teoremas provados em sala podem ser utilizados, desde que estes não sejam o objetivo da questão.
4. $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\}$

---

**Exercício 1** *Obtenha os raios de convergência das seguintes séries:*

*(a)* $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n z^n$; *(b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$;

**Exercício 2** *Calcule as integrais*

*(a)* $\int_\gamma z\overline{z}dz$, *sendo* $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

*(b)* $\int_\gamma e^{z^2}dz$, *sendo* $\gamma$ *uma curva suave, simples, fechada e orientada no sentido anti-horário.*

*(c)* $\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz$, *sendo* $\gamma$ *um contorno que contém a origem.*

**Exercício 3** *Considere a curva* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, *dada por* $\gamma(t) = 4e^{it}$ *(orientada no sentido anti-horário) e a função* $g : D(0, 4) \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$g(w) = \int_\gamma \frac{\cos(z)}{2z - 2w}dz.$$

*Calcule* $g(0)$, $g(\pi i)$ *e* $g(3\pi/2)$.

**Exercício 4** *Mostre que a série*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$$

*é uniformemente convergente no disco* $D(0, 1)$;

**Exercício 5** *Demonstre o teorema fundamental da álgebra: Todo polinômio, não constante,* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *de grau* $n \geqslant 1$ *possui pelo menos uma raíz.*

**Exercício 6** *Suponha que a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*seja uniformemente convergente no disco* $D(z_0, r)$. *Mostre que a função*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*é contínua em* $D(z_0, r)$.