CM 128 - Funções

Notas de Aula

PSE 2017

Departamento de Matemática - UFPR

Sumário

Introdução

O principal objetivo destas notas é fornecer aos estudantes *apenas um guia* para o curso Funções - CM 128 - ofertado pelo departamento de matemática da UFPR.
Recomendamos (fortemente) que os alunos busquem outros materiais para complementar seu estudo. Listamos no final do texto algumas boas referências para este fim.
Uma grande quantidade dos exercícios propostos neste texto foram inicialmente elaborados pelo prefessor Alexandre Trovon (UFPR) e vários outros pelo professor Lucas Pedroso (UFPR).
Por fim, lembramos ao leitor que este é um material ainda en construção, o qual pode apresentar erros de digitação e formatação. Sendo assim, ficaremos felizes em receber correções, sugestões e críticas.

Capítulo 1

Conjuntos

Resumo:

Nas primeiras aulas deste curso estudaremos alguns aspectos gereais sobre conjuntos, tais como relaçõe de pertinencia, inclusão e intersecção. Faremos ainda uma breve introdução sobre os principais conjuntos numéricos que serão abordados neste curso.

1.1 Aula 1 - Operações entre conjuntos

1. Relações de pertinencia e inclusão. Conjunto complementar;
2. União e interseção de conjuntos
3. Produto cartesiano

1.1.1 Conjuntos

Não será foco deste curso uma discussão formal sobre o conceito de *conjunto*. Para nossos fins a seguinte definição, dada por Georg Cantor (1845-1918), será suficiente:

Definição 1 (Conjunto) *Chama-se conjunto o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto*

Ao longo desta disciplina (bem como ao longo do curso de matemática) estudam-se vários tipos de conjuntos, tais como, os numéricos, de pontos, de curvas, de funções, de triângulos.

Alguns exemplos são:

Exemplo 1

(a) O conjunto numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(b) Conjunto das funções polinomiais, das funções trigonométricas;

(c) Gráficos de funções;

Definição 2 *Dado um conjunto A utilizaremos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para indicar que x é um elemento de A.*

Exemplo 2

(a) $10 \in \mathbb{N}$, $-7 \in \mathbb{Z}$;

(b) Com respeito aos conjuntos $A = \{1, 2, 7, 9\}$, $B = \{1, 7\}$ e $C = \{9, 10\}$ temos:

- $1 \in A$, $2 \in A$, $7 \in A$ e $9 \in A$;
- $1 \in B$ e $7 \in B$;
- $9 \in C$ e $10 \in C$;

Observação 1

(a) Note que todos os elementos de B são também elementos de A;

(b) Existem elementos de A que não são elementos de B;

(c) Os conjuntos B e C não possuem elementos comuns. (O símbolo $\emptyset$ indica o conjunto vazio, ou seja, aquele que não possui elementos.)

Com base nestas observações introduzimos os seguintes conceitos:

Definição 3 *Sejam A e B conjuntos.*

(i) Dizemos que B é subconjunto de A (notação $B \subset A$) quando todo elemento de B for elemento de A;

(ii) Dizemos que B é subconjunto próprio de A (notação $B \subsetneq A$) quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$;

(iii) Dizemos que os conjunto A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$;

(iv) Quando B é um subconjunto de A definimos o conjunto complementar B, em relação a A, como sendo aquele que contém todos os elementos que estão em A mas não em B e o denotamos por $A - B$, ou ainda, B_A^C. De modo mais preciso:

$$B_A^C = A - B = \{x \in A, \quad \textit{tais que} \quad x \notin B\}$$

Observação 2 *A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante ferramenta para a demonstração de alguns resultados. Vamos explorar este assunto mais adiante.*

Exemplo 3

Segue das definições acima e do exemplo anterior que:

- $B \subsetneq A$;
- $A - B = \{2, 9\}$;
- $A \neq B$;

Exemplo 4

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $0 \in A$;
- $3 \notin A$;
- $\{3,7\} \in A$;
- $\{\{3,7\}\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $7 \notin A$;
- $\{0,2\} \subset A$;
- $\{3\} \not\subset A$;

Observação 3 *Ao longo deste curso os alunos terão um primeiro contato formalização de conceitos matemáticos e demonstrações de proposições. Neste sentido recomendamos a leitura das seções 1.6 e 2.3 da referência [4]. Recomenda-se também a referência [1].*

1.1.2 União e Interseção

Exibimos agora duas operações entre conjuntos extremamente importantes:

Definição 4 *Sejam A e B conjuntos.*

(i) A união entre dois conjuntos A e B (notação $A \cup B$) é um novo conjunto que contém exatamente todos os elementos de A e todos os elementos B. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x, \quad \textit{tais que} \quad x \in A, \quad \textit{ou} \quad x \in B\} \tag{1.1}$$

(ii) A interseção entre os conjuntos A e B (notação $A \cap B$) é um novo conjunto que contém exatamente os elementos comuns a A e B. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x, \quad \textit{tais que} \quad x \in A, \quad \textit{e} \quad x \in B\}. \tag{1.2}$$

Exemplo 5 *Sejam A, B e C os conjuntos $A = \{1,5,7,9\}$, $B = \{1,7,10\}$ e $C = \{8,10\}$.*

- $A \cup B = \{1,5,7,9,10\}$;
- $A \cap B = \{1,7\}$;
- $B \cup C = \{1,5,7,8,9,10\}$;
- $B \cap C = \emptyset$;

Proposição 1 *As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.*

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(Vamos demonstrar apenas alguns destes itens, sendo que os demais devem ser feitos como exercício.)

Demonstração:

(a) Pela definição de inclusão devemos provar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ é também um elemento do conjunto A. Considere então $x \in A \cap B$. Segue de (1.2) que $x \in A$ e $x \in B$, logo

$$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow A \cap B \subset A.$$

(b) Para verificar este item devemos mostrar que todo elemento de A é um elemento de $A \cup B$. Para tanto, dado $x \in A$ segue de (1.1) que $x \in A \cup B$.

(c) Exercício.

(d) Este é um resultado do tipo **se e somente se**, ou seja, devemos provar duas afirmações:

(i) $(A \cup B) = (A \cap B) \implies A = B$;

(ii) $A = B \implies (A \cup B) = (A \cap B)$;

Para provar (i) devemos assumir que vale a igualdade $(A \cup B) = (A \cap B)$ e provar que $A = B$, ou seja, demonstar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Considere então $x \in A$. Segue do item (b) que $x \in A \cup B$, mas pela hipótese $(A \cup B) = (A \cap B)$ temos

$$x \in A \subset A \cup B = A \cap B,$$

então $x \in A \cap B$ e pela definição de interseção obtemos $x \in B$, portanto $A \subset B$.

Para provar que $B \subset A$ podemos seguir as mesmas ideias, pois para $x \in B$ temos

$$x \in B \subset A \cup B = A \cap B,$$

concluindo então a prova da afirmação (i).

A demonstração da afirmação (ii) segue dos seguintes fatos:

$$A = B \implies A \cup B = A \cup A = A$$

e

$$A = B \implies A \cap B = A \cap A = A$$

Assim, $A \cup B = A = A \cap B$, logo fica conluida a prova do item (d).

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Para provar a igualdade destes conjuntos devemos verificar as duas inclusões

(i) $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$

(ii) $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$

Para verificar (i) note que se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \notin A \cup B$, logo x não pode ser elemento de A e não pode ser elemento de B. Temos então $x \notin A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Mostramos então que

$$x \in (A \cup B)^C \implies x \in A^C \cap B^C$$

Agora, se $x \in A^C \cap B^C$ então $x \notin A$ e $x \notin B$, logo $x \notin A \cup B$ e portanto $x \in (A \cup B)^C$, o que conclui a prova de (ii).

(h) Exercício.

■

1.1.3 Produto cartesiano

Seja $\{x, y\}$ um conjunto, cujos elementos podem ou não ser distintos. Para estes elementos definimos dois novos elementos, chamados de pares ordenados, indicados por (x, y) e (y, x).

Dado um outro par ordenado (x', y') definimos

$$(x, y) = (x', y') \text{ se, e somente se, } x = x' \text{ e } y = y'$$

Em particular, $(x, y) = (y, x)$ se, e somente se, $x = y$.

Definição 5 *Dados dois conjuntos não vazios A e B definimos o produto cartesiano (notação $A \times B$) de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \quad e \quad y \in B\}$$

Exemplo 6

Com respeito aos conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{0\}$ temos:

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

(b) $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

Observação 4 *É interessante notar que o produto cartesiano não é comutativo, ou seja, nem sempre vale a igualdade $A \times B = B \times A$. De fato, basta considerar o produto de conjuntos distintos.*

1.1.4 Exercícios

Exercício 1 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{0, 3, 7, 5\} \quad e \quad C = \{0, -1, 2\},$$

determine o conjunto $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

Exercício 2 *Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$. Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.*

(a) $1 \in A$

(b) $2 \in A$

(c) $7 \notin A$

(d) $11 \in A$

(e) $\{1\} \in A$

(f) $\{1, 3, 4\} \subset A$

(g) $\{1, 3\} \cap \{3, 5, 7\} \subset A$

(h) $4 \subset A$

Exercício 3 *Considere os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\} \quad e \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

(a) Verifique se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a_1) $2 \in A$;

(a_2) $11 \in A$;

(a_3) $1 \in \mathcal{P}(A)$;

(a_4) $\{1, 3\} \subset A$;

(a_5) $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$;

(a_6) $\{1, 3\} \in A$;

(b) Como foi construído o conjunto $\mathcal{P}(A)$?

Exercício 4 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $B = \{2, 3, 4\}$,
- $C = \{2, 4, 5\}$.

Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $B \subset A$

(d) $B \subset C$

(e) $C \subset A$

(f) $C \subset B$

(g) $C \subset C$

(h) $\emptyset \subset B$

Exercício 5 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{3, 4, 5, 6\},$$

determine:

- $A \cap B$ e $A \cup B$
- $A \cap C$ e $A \cup C$
- $B \cap C$ e $B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C$ e $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$ e $A \cap (B \cup C)$

Exercício 6 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
- $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
- $D = \{3, 4, 5\}$,
- $E = \{3, 5\}$,

verifique quais destes conjuntos podem substituir o conjunto X nas seguintes afirmações:

(a) $X \subset D$ e $X \not\subset B$ (b) $X \subset C$ e $X \not\subset A$ (c) $X \subset A$ e $X \not\subset C$

Exercício 7 *Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, achar os conjuntos $X \neq A$ tais que $\{1\} \subset X$ e $X \subset A$.*

Exercício 8 *Determine os elementos do conjunto X, Y e Z, tais que:*

$$X \cap Y = \{2, 4\}, \quad X \cup Y = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$X \cap Z = \{2, 3\}, \quad X \cup Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 9 *Considere o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e os subconjuntos*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3\} \quad e \quad Z = \{4, 6, 8\}.$$

Determine:

- X^C, Y^C e Z^C
- $X^C \cap X$ e $X^C \cup X$
- $X \cap Y$, $X \cap Z$ e $Y \cap Z$
- $(X \cup Y)^C$ e $X^C \cup Y^C$
- $(X \cap Y)^C$ e $X^C \cap Y^C$
- $(X \cap Z)^C$ e $X^C \cap Z^C$

Exercício 10 *Construa exemplos de conjuntos A, B e C que não satisfazem as seguintes afirmações:*

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$, então $A \cap C = \emptyset$;

(b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \cap B \neq \emptyset$;

(c) Se $A \cap B \subset C$, então $A \subset C$;

Exercício 11 *Determine os elementos dos seguintes produtos cartesianos:*

- $\{1\} \times \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$
- $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
- $\{0, 2\} \times \{0, 2\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \times \{\{5\}, \{6\}\}$

Exercício 12 *Considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$. Determine:*

- $A \times (B \cup C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercício 13 *Determine os números reais que tornam iguais os seguintes pares ordenados:*

(a) $(x + y, 1)$ *e* $(3, x - y)$

(b) $(y - 2, 2x + 1)$ *e* $(x - 1, y + 2)$

Exercício 14 *Sejam a e b dois números pertencentes conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determine a interseção dos conjuntos*

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, \ldots\}.$$

Referências Bibliográficas

[1] EDGAR DE ALENCAR FILHO, *Teoria Elementar dos Conjuntos*, Livraria Nobel, 1976.

[2] ELON LAGES LIMA, *Números e Funções Reais*, SBM, 2014.

[3] GESON IEZZI, CARLOS MURAKAMI, *Fundamentos de Matemática - Vol 1, 2, 3, 6*, Atual, 2013.

[4] IVAN NIVEN., *Números: Racionais e Irracionais*, SBM, 2012.

[5] ROBERTO ROMANO, *Cálculo Diferencial e Integral*, Atlas, 1983.