FUNÇÕES - PROVA 2 -
Processo Seletivo Estendido 2016

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

(Questão 1) Faça o que se pede.

(a) Obtenha uma equação do segundo grau, de coeficientes inteiros, tal que os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sejam suas únicas raízes.

(b) Para quais valores $k \in \mathbb{R}$ a equação $x^2 + x - 6 + k = 0$ possui duas raízes reais e distintas?

(c) Calcule $(x_1 + x_2)^{2016}$, sabendo que x_1 e x_2 são zeros da função real $f(x) = 2016x^2 + 2016x - 2015$.

(d) Considere as funções reais $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = 2ax + b$. Dado $h \neq 0$, mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) + ah, \ \forall x \in \mathbb{R};$$

(Questão 2) Considere um número real α e a função $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \alpha(x+3)(x+2)(x-1)$.

(a) Se $f(2) = 1$, qual é o valor de α?

(b) Esboce o gráfico de f nos casos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$;

(c) Supondo $\alpha > 0$, obtenha os intervalos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$ tais que $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathcal{P}$ e $f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathcal{N}$;

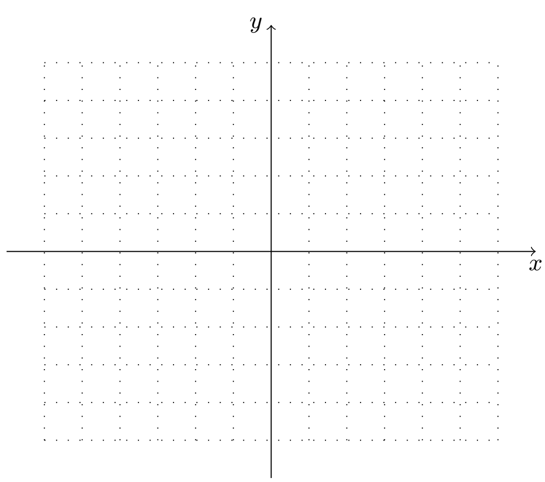


Gráfico para $\alpha < 0$

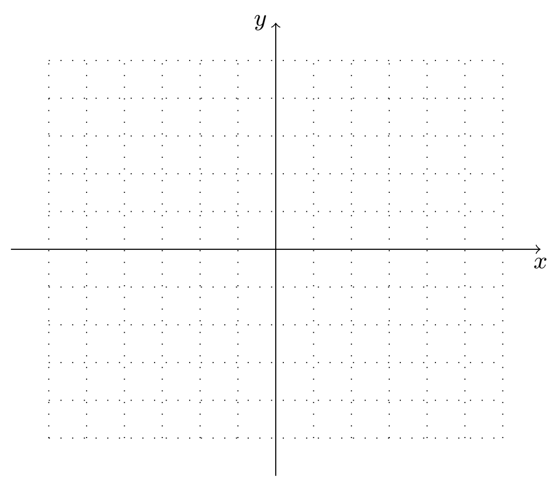
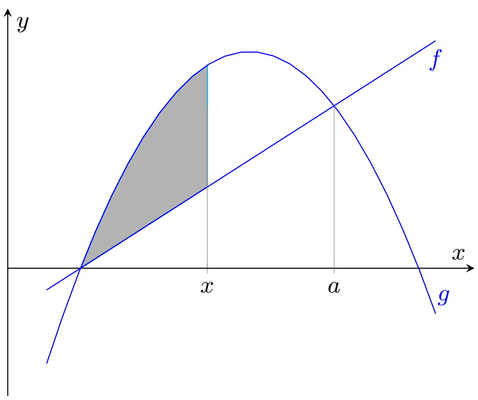


Gráfico para $\alpha > 0$

(Questão 3) Abaixo temos os gráficos das funções reais $f(x) = x - 2$ e $g(x) = -x^2 + 8x - 12$.



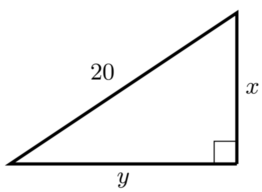
(a) Obtenha todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leqslant g(x)$;

(b) Uma função que para cada $x \in [2, 5]$ determina o valor da área escura (entre os gráficos de g e f) é dada pela expressão

$$A(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x + \frac{26}{3}.$$

Nestas condições, qual é o maior valor possível para a área escura?

(Questão 4) (ANULADA) Com 100 metros de arame deseja-se cercar um terreno na forma de um triângulo retângulo da seguinte forma: a hipotenusa sempre terá comprimento igual a 20 metros, como indica a figura.



(a) Se $x = 10m$, qual é o valor da área delimitada pelo arame;

(b) Obtenha uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in (a, b)$ associe o valor $f(x)$ da área delimitada pelo arame;

(c) Qual é a área máxima que se pode obter para este terreno com as condições impostas?