uma inversa à direita em qualquer $B \subset f(A)$. De fato, as inversas à direita de f em B podem ser facilmente obtidas da seguinte maneira: para cada $w \in B$, escolha qualquer $z_w \in A$ tal que $f(z_w) = w$, e defina $g(w) = z_w$.

Por exemplo, as funções

$$g(z) = \sqrt{z} \quad \text{e} \quad h(z) = -\sqrt{z} \quad (z \in \mathbb{C})$$

são inversas à direita da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$. A função g é chamada *função raiz quadrada principal*. Definindo

$$m(z) = \begin{cases} \sqrt{z} & \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ -\sqrt{z} & \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

obtemos uma outra inversa à direita de f. Como o leitor já percebeu, existem inúmeras "funções raiz quadrada".

Consideremos agora a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$. A função

$$L(z) = \operatorname{Log} z \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$$

é uma inversa à direita de f, chamada *função logaritmo principal*. Mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a função

$$L_k(z) = \operatorname{Log} z + 2k\pi i \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$$

é uma inversa à direita de f. Assim, vemos que também existem inúmeras "funções logaritmo".

Concluímos esta seção observando que se g é uma inversa à direita de uma função $f : A \to \mathbb{C}$ em um subconjunto B de $f(A)$, então g é injetiva em B. De fato, se $w_1, w_2 \in B$ e $g(w_1) = g(w_2)$, então

$$w_1 = f(g(w_1)) = f(g(w_2)) = w_2.$$

2.7 Exercícios resolvidos

ER 1. Prove que se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de uma função polinomial $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reais, então $\overline{z_0}$ também é uma raiz de f.

ER 2. Mostre que a função $f(z) = e^z$ transforma a reta vertical $R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a\}$ no círculo $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e^a\}$ e transforma a reta horizontal $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b\}$ na semi-reta $L = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{ib} \text{ com } r > 0\}$.

ER 3. Mostre que a função $f(z) = (1-z)/(1+z)$ transforma o disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ no semi-plano $H = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$.

ER 4. Dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e dado um ponto $z_0 \in A$, dizemos que z_0 é um *ponto fixo* de f se $f(z_0) = z_0$. Determine todos os pontos fixos da função

Prova 1

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 1}.$$

ER 5. Mostre que

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

ER 6. Mostre que

$$|\cos z| \geq |\cos x| \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{sen} x|$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

ER 7. Ache todas as raízes da equação $\operatorname{senh} z = i$.

ER 8. Sejam $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(z) = \operatorname{Log}(z^2 + 1).$$

(a) Prove que f é uma função injetiva.

(b) Determine sua imagem $B = f(A)$.

(c) Calcule sua inversa $f^{-1} : B \to A$.

2.8 Exercícios propostos

EP 1. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(z) = (e^z + e^{-z})/(z^2 + \overline{z}^2)$.

(b) $g(z) = (z^2 + 5z)/(e^z - 1)$.

(c) $h(z) = \operatorname{Log}(e^z - e^{-z})$.

(d) $k(z) = (z\cos z)/(z^4 + 3z^2 - 4)$.

EP 2. Expresse as partes real e imaginária das seguintes funções como funções das variáveis reais x e y:

(a) $f(z) = z^3 + iz^2$.

(b) $g(z) = \overline{z}e^z - ze^{\overline{z}}$.

(c) $h(z) = i\overline{z}^2 - 2z^2 + i$.

(d) $k(z) = z\operatorname{Log} z$ para $\operatorname{Re} z > 0$.

EP 3. Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : A \to \mathbb{C}$ funções. Mostre que se f e g são limitadas em um subconjunto S de A, então $f+g$ e fg também são limitadas em S.

EP 4. Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e tome $c \in D$. Mostre que a função $f(z) = (z+c)/(1+\overline{c}z)$ satisfaz $f(D) = D$.
(Sugestão: use o EP 17 do Capítulo 1.)

EP 5. Determine $f(S)$, onde $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}$ e $f(z) = e^{1/z}$.

EP 6. Seja L uma reta no plano complexo. Determine a imagem de L pela função $f(z) = \sqrt{z}$ quando:

(a) L é horizontal.

(b) L é vertical.

(c) L é dada pela equação $y = x\sqrt{3}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

EP 7. Considere a função $f(z) = 1/z$. Determine a imagem dos seguintes conjuntos por f:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}\backslash\{0\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

EP 8. Determine a imagem do triângulo com vértices em $3+4i$, $-3+4i$ e $-5i$ pela função $f(z) = z + 5i$.

EP 9. Determine a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ pelas seguintes funções:

(a) $f(z) = 2iz - i$.

(b) $g(z) = i/z - 1$.

EP 10. Conclua a demonstração da Proposição 2.4.

EP 11. Mostre que a imagem do disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ pela função $f(z) = e^z$ está contida no anel $A = \{w \in \mathbb{C} : 1/e \leq |w| \leq e\}$.
(Sugestão: use o EP 18 do Capítulo 1.)

EP 12. Mostre que a imagem do disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ pela função $f(z) = \cos z$ (resp. $f(z) = \operatorname{sen} z$) está contida no disco $D' = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq (e^2+1)/(2e)\}$.

EP 13. Demonstre a Proposição 2.6.

EP 14. Ache todas as raízes das equações:

(a) $\cosh z = 1/2$.

(b) $\operatorname{senh} z = 1$.

(c) $\cosh z = -2$.

EP 15. Prove que

$$\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z \quad \text{e} \quad \cosh(iz) = \cos z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

EP 16. Determine os pontos fixos das seguintes funções:

(a) $f(z) = (1-i)z + 2$.

(b) $g(z) = \overline{z} + i$.

(c) $h(z) = ze^z$.

EP 17. Qual é o maior número de pontos fixos que uma função polinomial $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ de grau $n \geq 2$ pode ter?

EP 18. Exiba uma inversa à direita da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$.

EP 19. Exiba uma inversa à direita g da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^4$ satisfazendo $g(-1) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2$.

3

Noções Básicas da Topo[...] Plano Complexo

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições [...] básicos da topologia usual de $\mathbb{C}$ que são indispensáveis [...] cuidadosa da teoria de funções de uma variável comple[...] maior aqui é o de organizar os pré-requisitos de topolog[...] futuras referências, e não o de oferecer um aprofundament[...]

Na Seção 3.2 introduzimos e estudamos os conceitos [...] conjunto fechado, interior, aderência, fronteira, ponto de [...] junto limitado.

Na Seção 3.3 apresentamos alguns conceitos e resultados [...] sequências de números complexos. Também estabelecemos [...] zano-Weierstrass no caso complexo.

Nas Seções 3.4 e 3.5 estudamos as noções de continuidad[...] ções complexas. Estabelecemos várias propriedades impor[...] a continuidade de algumas funções concretas, incluindo a [...] principal $z \mapsto \operatorname{Arg} z$, que desempenhará um papel impor[...] ramos de logaritmos.

Na Seção 3.6 definimos a noção de conjunto compacto. [...] caracterização importante destes conjuntos por meio de se[...]