CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Exercício 1 *Demonstre o seguinte resultado: Sejam f e g duas funções analíticas num disco centrado em z_0. Se z_0 é um zero de ordem n de f e um zero de ordem m de g, então a função $h = f/g$*

(a) *tem um zero de ordem $n - m$ em z_0 se $n > m$;*

(b) *tem uma singularidade removível em z_0 se $n = m$;*

(c) *tem um pólo de ordem $m?m$ em z_0 se $m > n$.*

Exercício 2 *Classifique as singularidades no ponto z_0 e obtenha os resíduos $Res(f)|_{z=z_0}$*

(a) $f(z) = cotg(z)$, $z_0 = k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$;

(b) $f(z) = (z-1)^{-3}cos(\pi z/2)$, $z_0 = 1$;

(c) $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$, $z_0 = 0$;

(d) $f(z) = (z^2+1)^{-3}$, $z_0 = -i$;

(e) $f(z) = sen(1/z)$, $z_0 = 0$;

(f) $f(z) = (cos(z) - 1)/z^2$, $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = z/1 - cos(z)$, $z_0 = 0$;

Exercício 3 *Calcule as integrais:*

(a) $\int_\gamma z^2 e^{i/z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(b) $\int_\gamma z^5 sen(z^{-2}) dz$, $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(c) $\int_\gamma (1+z)(1 - sen(z))^{-1} dz$, $\gamma(t) = 8e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(d) $\int_\gamma e^z/sen(z) dz$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

Exercício 4 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} dz$$

considerando γ os círculos:

(a) $|z| = 3$; (b) $|z + 3i| = 3$; (c) $|z - 2i| = 1/3$; (d) $|z - 1| = 2$;

Exercício 5 *Calcule as integrais impróprias*

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, *sendo as constantes reais e satisfazendo* $b^2 - 4ac < 0$;