CMM108

Fernando de Ávila Silva

Introdução a teoria da medida

- Aula 1 (04/03):
  - σ-álgebra;
  - funções mensuráveis.
- Aula 2 (09/03):
  - propriedes de funções mensuráveis;
  - reta estendida.
- Aula 3 (11/03):
  - medidas.

σ-álgebra

Definição

Considere X um conjunto qualquer e seja $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $X \in \mathcal{A}$;

ii) *Se* $E \in \mathcal{A}$, *então* $E^C \in \mathcal{A}$;

iii) *Se* $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, *então a união* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ *é também um elemento de* $\mathcal{A}$.

σ-álgebra

Definição

Considere X um conjunto qualquer e seja $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $X \in \mathcal{A}$;

ii) *Se* $E \in \mathcal{A}$, *então* $E^C \in \mathcal{A}$;

iii) *Se* $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, *então a união* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ *é também um elemento de* $\mathcal{A}$.

- O par $(X, \mathcal{A})$ é dito espaço mensurável.
- Um conjunto $E \in \mathcal{A}$ é dito $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável)

Exemplos básicos

Exemplos básicos

1. Se X é um conjunto qualquer, então $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X) define uma σ-álgebra sobre X.

Exemplos básicos

1. Se X é um conjunto qualquer, então $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X) define uma σ-álgebra sobre X.
2. Se X é um conjunto qualquer, então

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$$

   define uma σ-álgebra sobre X.

Exemplos básicos

1. Se X é um conjunto qualquer, então $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X) define uma σ-álgebra sobre X.
2. Se X é um conjunto qualquer, então

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$$

   define uma σ-álgebra sobre X.
3. Considere $X = \mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais), então

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \{2, 4, 6, 8, \ldots\}\}.$$

   define uma σ-álgebra sobre $\mathbb{N}$.

Exemplos básicos

1. Se X é um conjunto qualquer, então $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X) define uma σ-álgebra sobre X.
2. Se X é um conjunto qualquer, então

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$$

   define uma σ-álgebra sobre X.
3. Considere $X = \mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais), então

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \{2, 4, 6, 8, \ldots\}\}.$$

   define uma σ-álgebra sobre $\mathbb{N}$.
4. Considere $X = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R};\ E \quad \text{é enumerável}\ \}.$$

   Neste caso, $\mathcal{A}$ não é uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Interseção de σ-álgebras

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $\{E_\lambda\}_{\lambda \in F}$ *uma coleção* ***enumarável*** *de conjuntos mensuráveis. Nestas condições, a interseção*

$$E = \bigcap_{\lambda \in F} E_\lambda$$

é um conjunto mensurável.

Interseção de σ-álgebras

Proposição

Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $\{E_\lambda\}_{\lambda \in F}$ uma coleção ***enumarável*** *de conjuntos mensuráveis. Nestas condições, a interseção*

$$E = \bigcap_{\lambda \in F} E_\lambda$$

é um conjunto mensurável.

Teorema

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in F$, uma coleção qualquer de σ-álgebras sobre X. Defina por $\mathcal{A}$ a seguinte coleção de conjuntos de X:

$$\mathcal{A} = \{E \subset X;\ E \in \mathcal{A}_\lambda, \forall \lambda \in F\}$$

Então, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre X.

Notação usual: $\mathcal{A} = \bigcap_{\lambda \in F} \mathcal{A}_\lambda$.

Geradores de σ-álgebras

Definição

Sejam X um conjunto e A uma coleção (não vazia) de subconjuntos de X. Considere também $\mathcal{F}$ a coleção de todas as σ-álgebras que contém A e defina

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{F}} \mathcal{S}.$$

Dizemos que $\mathcal{A}$ é σ-álgebra erada por A. (De fato, está é a menor σ-álgebra que contém A).

Geradores de σ-álgebras

Definição

Sejam X um conjunto e A uma coleção (não vazia) de subconjuntos de X. Considere também $\mathcal{F}$ a coleção de todas as σ-álgebras que contém A e defina

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{F}} \mathcal{S}.$$

Dizemos que $\mathcal{A}$ é σ-álgebra erada por A. (De fato, está é a menor σ-álgebra que contém A).

Exemplo

Considere $X = \mathbb{R}$ e ponha

$$A = \{E \subset \mathbb{R};\ E \text{ é um intervalo aberto }\}.$$

A σ-álgebra gerada por A, denotada por $\mathbb{B}$, é comumente chamada de álgebra de Borel (ou σ-álgebra de Borel).

Funções mensuráveis

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ tem-se que } A_\alpha = \{x \in X;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Funções mensuráveis

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ tem-se que } \ A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Exemplo

1. *Toda função constante é mensurável*
2. *Sejam $E \subset X$ e $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definida por*
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x \in E, \\ 0, & se \ \ x \notin E. \end{cases}$$
3. *Considre $X = \mathbb{R}$ e $\mathbb{B}$ a álgebra de Borel. Então, toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{B}$-mensurável.*

Teorema

Sejam $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

Teorema

Sejam $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$*;*

Teorema

Sejam $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $A_\alpha = \{x \in X;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$*;*

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $B_\alpha = \{x \in X;\, f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$*;*

Teorema

Sejam $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$;

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $B_\alpha = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $C_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

Teorema

Sejam $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$;

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que* $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Proposição

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$ um número real qualquer. As seguintes funções são mensuráveis:

- cf;
- f^2;
- $f + g$;
- fg;
- $|f|$.

Funções complexas

- Sejam X um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. Existem duas funções $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \ \forall x \in X.$$

Funções complexas

- Sejam X um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. Existem duas funções $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \ \forall x \in X.$$

- Notação $f_1 = \Re(f)$ e $f_2 = \Im(f)$.

Funções complexas

- Sejam X um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. Existem duas funções $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \ \forall x \in X.$$

- Notação $f_1 = \Re(f)$ e $f_2 = \Im(f)$.

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se vale ambas funções $\Re(f)$ e $\Im(f)$ são mensuráveis.

Funções complexas

- Sejam X um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. Existem duas funções $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \ \forall x \in X.$$

- Notação $f_1 = \Re(f)$ e $f_2 = \Im(f)$.

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se vale ambas funções $\Re(f)$ e $\Im(f)$ são mensuráveis.

Pergunta:

Produtos e somas de funções complexas mensuráveis são mensuráveis? e $|f| = \sqrt{\Re(f)^2 + \Im(f)^2}$?

Observação:

Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definimos as funções $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ pondo

$$f^+(x) = \sup\{f(x)\,,\,0\} \;\text{ e }\; f^+(x) = \sup\{-f(x)\,,\,0\}.$$

Observação:

Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definimos as funções $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ pondo

$$f^+(x) = \sup\{f(x)\,,\,0\} \text{ e } f^+(x) = \sup\{-f(x)\,,\,0\}.$$

Note que:

- $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$;
- $f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right)$ e $f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$.

Exercício: Mostre que f é mensurável se, e somente se, $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ são ambas mensuráveis.

Reta estendida: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos:
    - $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x$;
    - $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x$, se $x > 0$;
    - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x = 0$, se $x = 0$;
    - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x$, se $x < 0$;

Reta estendida: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos:
  - $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x$;
  - $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x$, se $x > 0$;
  - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x = 0$, se $x = 0$;
  - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x$, se $x < 0$;

Observação

Não estamos definindo quociente com denominador $(\pm\infty)$ *e nem a soma* $(+\infty) + (-\infty)$.

Reta estendida: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos:
  - $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x$;
  - $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x$, se $x > 0$;
  - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x = 0$, se $x = 0$;
  - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x$, se $x < 0$;

Observação

Não estamos definindo quociente com denominador $(\pm\infty)$ *e nem a soma* $(+\infty) + (-\infty)$.

Observação

Álgebra de Borel estendida: dado $E \in \mathbb{B}$ *coloque*

$$E_1 = E \cup \{-\infty\},\ E_2 = E \cup \{+\infty\},\ E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Reta estendida: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos:
  - $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x$;
  - $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x$, se $x > 0$;
  - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x = 0$, se $x = 0$;
  - $x(\mp\infty) = (\mp\infty)x$, se $x < 0$;

Observação

Não estamos definindo quociente com denominador $(\pm\infty)$ *e nem a soma* $(+\infty) + (-\infty)$.

Observação

Álgebra de Borel estendida: dado $E \in \mathbb{B}$ *coloque*

$$E_1 = E \cup \{-\infty\},\ E_2 = E \cup \{+\infty\},\ E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

$$\overline{\mathbb{B}} \doteq \{E_1, E_2, E_3\} \cup \mathbb{B}.$$

Funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Uma função real (estendida) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita mensurável se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ tem-se que } A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Uma função real (estendida) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita mensurável se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ tem-se que } A_\alpha = \{x \in X;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Denotamos ainda

$$\mathbb{M}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\; \text{f é mensurável}\}.$$

Funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Uma função real (estendida) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita mensurável se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ tem-se que } A_\alpha = \{x \in X;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Denotamos ainda

$$\mathbb{M}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\ \text{ f é mensurável}\}.$$

Observação

Note que se $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$*, então*

$$\{x \in X;\, f(x) = +\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X;\, f(x) > j\} \in \mathcal{A}$$

Funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Definition

Seja $(X, \mathcal{A})$. Uma função real (estendida) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita mensurável se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ tem-se que } \ A_\alpha = \{x \in X;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Denotamos ainda

$$\mathbb{M}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\ \text{ f é mensurável}\}.$$

Observação

Note que se $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$, então

$$\{x \in X;\, f(x) = +\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X;\, f(x) > j\} \in \mathcal{A}$$

e

$$\{x \in X;\, f(x) = -\infty\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in X;\, f(x) \leq -j\} \in \mathcal{A}.$$

Theorem

Temos $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$ *se, e somente se,*

- $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathcal{A}$;
- $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathcal{A}$;
- *a função* $f_1 : X \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & se \;\; x \notin A \cup B, \\ 0, & se \;\; x \in A \cup B, \end{cases}$$

  também é mensurável.

Demonstração: ($\Longrightarrow$)
Suponha $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$. Já sabemos que

- $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathcal{A}$,
- $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathcal{A}$.

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos então:

Demonstração: ($\Longrightarrow$)
Suponha $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$. Já sabemos que

- $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathcal{A}$,
- $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathcal{A}$.

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos então:

- Se $\alpha \geq 0$, então

$$\{x \in X; f_1(x) > 0\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A;$$

Demonstração: ($\Longrightarrow$)
Suponha $f \in \mathbb{M}(X, \mathcal{A})$. Já sabemos que

- $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathcal{A}$,
- $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathcal{A}$.

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos então:

- Se $\alpha \geq 0$, então
$$\{x \in X; f_1(x) > 0\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A;$$
- Se $\alpha < 0$, então
$$\{x \in X; f_1(x) > 0\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B;$$

Demonstração: ($\Longleftarrow$) (Exercício)

Definição (Medida)

Seja $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Uma função*

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$

(Note que o domínio de tal função é a coleção $\mathcal{A}$*).*

é dita mensurável se são satisfeitas as seguintes propriedades:

Definição (Medida)

Seja $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Uma função*

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$

(Note que o domínio de tal função é a coleção $\mathcal{A}$*).*

é dita mensurável se são satisfeitas as seguintes propriedades:

- $\mu(\emptyset) = 0$;

Definição (Medida)

Seja $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Uma função*

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$

(Note que o domínio de tal função é a coleção $\mathcal{A}$*).*

é dita mensurável se são satisfeitas as seguintes propriedades:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu(E) \geq 0$, *para todo* $E \in \mathcal{A}$;

Definição (Medida)

Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$

(Note que o domínio de tal função é a coleção $\mathcal{A}$).

é dita mensurável se são satisfeitas as seguintes propriedades:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu(E) \geq 0$, *para todo* $E \in \mathcal{A}$;
- *(contável aditiva) Se* $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, *com* $E_j \cap E_k = \emptyset$ *para* $j \neq k$, *então*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Exemplo

1. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu_1(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{P}(X).$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ E = \emptyset, \\ \infty, & se \ \ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Exemplo

1. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu_1(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{P}(X).$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ E = \emptyset, \\ \infty, & se \ \ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Fixado* $p \in X$ *defina*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ p \notin E \\ 1, & se \ \ p \in E. \end{cases}$$

Exemplo

1. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu_1(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{P}(X).$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ E = \emptyset, \\ \infty, & se \ \ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Fixado* $p \in X$ *defina*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ p \notin E \\ 1, & se \ \ p \in E. \end{cases}$$

3. *Considere* $X = \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & se \ E \ é \ finito \\ \infty, & se \ E \ é \ infinito. \end{cases}$$

Exemplo

1. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu_1(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{P}(X).$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ E = \emptyset, \\ \infty, & se \ \ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. *Considere* $X \neq \emptyset$ *and* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Fixado* $p \in X$ *defina*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & se \ \ p \notin E \\ 1, & se \ \ p \in E. \end{cases}$$

3. *Considere* $X = \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & se\ E\ é\ finito \\ \infty, & se\ E\ é\ infinito. \end{cases}$$

4. *No espaço* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *existe uma única medida* $\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tal que*

$$\mu((a, b)) = b - a$$

$\mu \doteq$ *Medida de Lebesgue*

Definição

Uma medida μ é dita finita se $\mu(E) \neq \infty$, para todo $E \in \mathcal{A}$. Dizemos ainda que μ é σ-finita se existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ such that

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \;\; e \;\; \mu(E_n) < \infty, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição

Uma medida μ é dita finita se $\mu(E) \neq \infty$, para todo $E \in \mathcal{A}$. Dizemos ainda que μ é σ-finita se existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ such that

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \;\; e \;\; \mu(E_n) < \infty, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. (não finita e não σ-finita) Considere $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E = \emptyset, \\ \infty, & \text{se } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definição

Uma medida μ é dita finita se $\mu(E) \neq \infty$, para todo $E \in \mathcal{A}$. Dizemos ainda que μ é σ-finita se existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ such that

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \;\; e \;\; \mu(E_n) < \infty, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. (não finita e não σ-finita) Considere $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; E = \emptyset, \\ \infty, & \text{se } \; E \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. (finita e não σ-finita) Considere $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Fixado $p \in X$ defina

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; p \notin E \\ 1, & \text{se } \; p \in E. \end{cases}$$

Definição

Uma medida μ é dita finita se $\mu(E) \neq \infty$, para todo $E \in \mathcal{A}$. Dizemos ainda que μ é σ-finita se existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ such that

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ \ e \ \ \mu(E_n) < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. (não finita e não σ-finita) Considere $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ E = \emptyset, \\ \infty, & \text{se } \ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. (finita e não σ-finita) Considere $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Fixado $p \in X$ defina

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ p \notin E \\ 1, & \text{se } \ p \in E. \end{cases}$$

3. (não finita, mas σ-finita) Considere $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E), & \text{se } \\ 1, & \text{se } \ p \in E. \end{cases}$$

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$. Sejam $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subseteq F$. Temos então:

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$. Sejam $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subseteq F$. Temos então:

- $\mu(E) \leq \mu(F)$;

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$. Sejam $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subseteq F$. Temos então:

- $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- *Se* $\mu(E) < \infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$. Sejam $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subseteq F$. Temos então:

- $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- *Se* $\mu(E) < \infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$.

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$. Sejam $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subseteq F$. Temos então:

- $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- *Se* $\mu(E) < \infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$.

- *Se* $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente em* $\mathcal{A}$, *então*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n);$$

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$. Sejam $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subseteq F$. Temos então:

- $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- *Se* $\mu(E) < \infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Theorem

Considere μ uma medida sobre uma σ-álebra $\mathcal{A}$.

- *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente em* $\mathcal{A}$, *então*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n);$$
- *Se* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência decrescente em* $\mathcal{A}$ *com* $\mu(F_1) < \infty$. *Então*
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$