LISTA - 1

---

1 Números Reais

1. Expresse cada número como decimal:

(a) $\frac{7}{10}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{9}{15}$ (d) $-\frac{7}{8}$

(e) $-\frac{17}{20}$ (f) $\frac{4}{11}$ (g) $-\frac{8}{7}$ (h) $-\frac{56}{14}$

2. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:

(a) $2,4$ (b) $-3,6$ (c) $0,5555\dots$

(d) $0,\overline{18}$ (e) $0,09595\dots$ (f) $3,\overline{27}$

(g) $1,38181\dots$ (h) $-4,1\overline{7}$ (i) $2,472472\dots$

(j) $1,6\overline{42}$ (k) $0,\overline{857142}$ (l) $1,35135135...$

3. Cortou-se, primeiramente, $\frac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se $0,6$ do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.

4. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?

5. Transforme os decimais em frações irredutíveis. Em seguida, reponda a pergunta.

(a) 2,5 e 2,4999... (b) 1,02 e $1,01\overline{9}$ (c) 3,74 e 3,73999... (d) $5,\overline{9}$ e 6

6. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

(a) $3 \in I\!\!R$ (b) $I\!\!N \subset I\!\!R$ (c) $\mathbb{Z} \subset I\!\!R$

(d) $\frac{1}{2} \in I\!\!R - \mathbb{Q}$ (e) $\sqrt{4} \in I\!\!R - \mathbb{Q}$ (f) $\sqrt[3]{4} \in I\!\!R - \mathbb{Q}$

(g) $\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) \in I\!\!R - \mathbb{Q}$ (h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in I\!\!R - \mathbb{Q}$ (i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

7. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

(a) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

(b) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$.

(c) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$.

8. Determine o valor de x, sabendo que $\dfrac{1}{2 - \dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$.

9. Resolva as inequações abaixo.

(a) $|x-7| < 9$ (b) $|2x+3| \leq 10$

(c) $|3x-1| < x$

10. Represente graficamente os seguintes intervalos:

(a) $[1, +\infty[$ (b) $]-2, +\infty[$

(c) $[3, 8[$ (d) $]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[$

11. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

(a) $x(x-3)(6-x) < 0$

(b) $\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+5} \geq 0$

(c) $|5x| > 1$

(d) $|3x-4| \geq 2$

(e) $\dfrac{|x-1|(x^2-2)}{x-1} > 0$

(f) $|x-3| > x+1$

12. Use a fórmula para a solução da equação quadrática para resolver as seguintes equações:

(a) $5x^2 + 6x - 1 = 0$ (b) $2x^2 = 18x + 5$

(c) $x(2x-3) = 2x - 6$ (d) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

(e) $2x^2 = 13(x-1) + 3$

13. Resolva a expressão $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$.

14. Em cada item, encontre o conjunto S das soluções reais da equação ou inequação dada.

(a) $|x^2 - 5x - 3| \leq 3$ (b) $|2x^2 + 5x + 1| = 1$ (c) $|2x^2 + 5x + 1| = -1$

(e) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ (f) $|-x^2 + 2x + 5| > 2$

15. Determine os valores de K para os quais as equações terão raízes reais e iguais.

(a) $5x^2 - 4x - (5+K) = 0$ (b) $(K+2)x^2 + 3x + (K+3) = 0$

(c) $x^2 + 3 - K(2x-2) = 0$ (d) $(K+2)x^2 + 5Kx - 2 = 0$

(e) $x^2 - x(2+3K) + 7 = 0$ (f) $(K-1)x^2 + 2x + (K+1) = 0$

2 Generalidades sobre Funcões

16. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Com a tabela

x	y
a	4
e	3
i	3
o	2
u	1

estabelecemos uma regra entre os elementos de A e B de modo que a cada $x \in A$ colocado na tabela, associa-se o $y \in B$ colocado à sua direita. Verifique se a regra assim estabelecida determina uma função $f : A \to B$.

17. Com os mesmos conjuntos A e B do exercício anterior, diga se cada tabela dá origem a uma função

$f : A \to B$. Em caso afirmativo, diga se a função é injetora e se é sobrejetora.

(a)

x	y
a	
e	1
i	
o	2
u	

(b)

x	y
a	1
e	1
i	1
o	2
u	2

(c)

x	y
a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

(d)

x	y
a	1
e	2
e	3
i	4
u	5
u	1

(e)

x	y
a	5
e	5
i	5
o	5
u	5

(f)

x	y
a	1
i	2
u	3

(g)

x	y
a	3
e	4
i	5
o	5
u	4

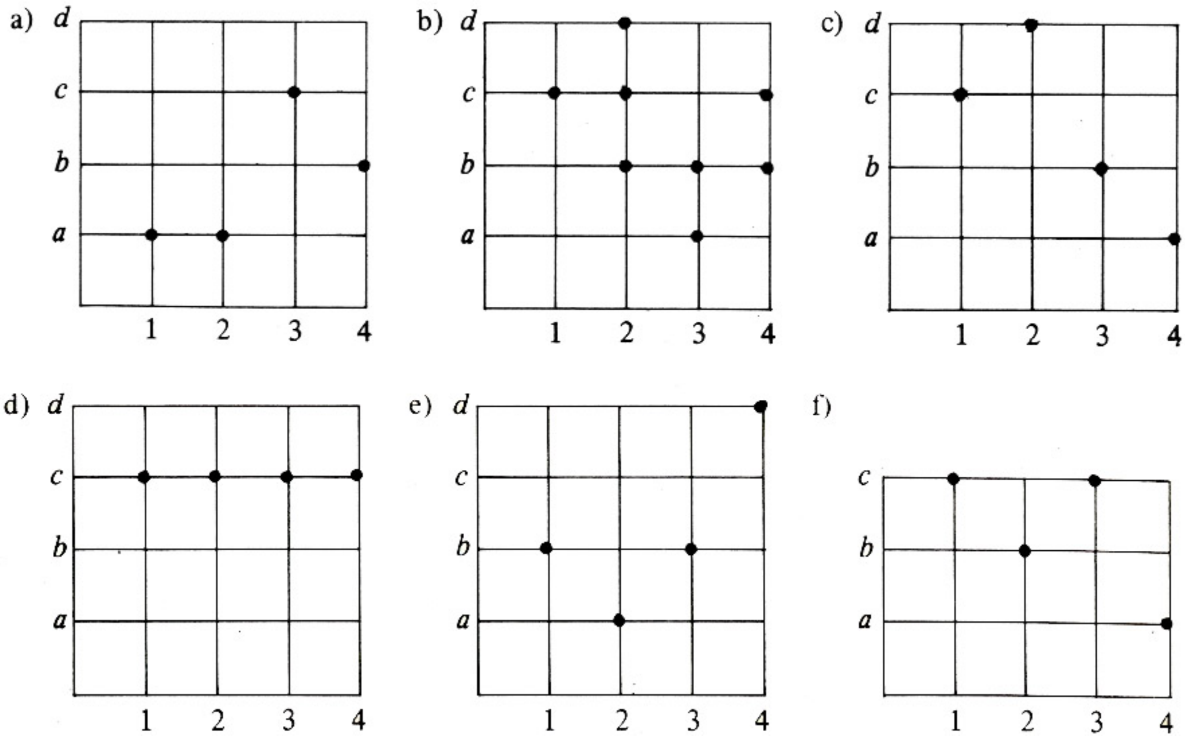
(h)

x	y
a	1
e	4
i	2
o	5
u	3

(i)

x	y
a	2
e	1
i	2
o	3
u	3

18. Em cada item a seguir, considere o conjunto G dos pontos assinalados na malha



formado por pontos do produto cartesiano $A \times B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, exceto em f), onde $B = \{a, b, c\}$. Em cada caso, verifique se G determina uma função. Em caso afirmativo, diga se é injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.

19. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$, calcule:

(a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ (b) $\dfrac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$ (d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $f(x) = \sqrt{g(a)}$

20. Calcular $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

(a) $f(x) = x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $f(x) = 4x^4$

21. Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

22. Determinar os valores de m para que a equação do segundo grau $(m+2)x^2+(3-2m)x+(m-1) = 0$ tenha raízes reais.

23. Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m+1)x + (m+1)$ tenha um zero real duplo.

24. Determinar os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m-1)x + (m-2) = 0$ não tenha raízes reais.

25. Construir o gráfico e determinar o conjunto imagem das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -2 & \text{se} \quad x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se} \quad x \neq -2 \\ 3 & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad 0 \leq x < 2 \\ -x^2+9 & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x^2-2x+1 & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ -1 & \text{se} \quad x < -2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2-4x & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$

26. Sabe-se que um triângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y, expresse y como função de x. Expresse a área desse triângulo como função de x.

27. Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a tem lados x e y, sendo que y está sobre o diâmetro a. Expresse y em função de x. Expresse a área do retângulo em função de x.

28. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo retângulo ABC, em função da base a e da altura h.

29. Tico e Teco, torcedores fanáticos de certo time da capital, ganharam de seus tios uns cofrinhos na forma de porquinhos. No de Tico havia R\$30,00 e no de Teco R\$ 50,00. Os moleques resolveram guardar parte da mesada semanal. Tico prometeu guardar R\$ 5,00 por semana e Teco, R\$ 3,00.
(a) Faça uma tabela representando a situação semanal das mesadas de Tico e Teco.
(b) Determinar as quantias nos cofrinhos em 20 semanas.
(c) Quando terão quantias iguais?
(d) Em que semana Tico terá R\$ 12,00 a mais que Teco?
(e) Em que semana Teco terá R\$ 12,00 a mais que Tico?

(f) Em que momento Tico terá o dobro da quantia de Teco?
(g) Expresse a quantia guardada pelo Tico em função do número n de semanas.
(h) Expresse a quantia guardada pelo Teco em função do número n de semanas.

30. Calcular $f(a)$ sabendo que:

(a) $a = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(b) $a = 0$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{1 - x^2}$

(c) $a = \dfrac{7}{2}$ e $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(d) $a = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 5x + 1}$

31. Se $f(x) = x^3 + 4x - 3$, calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(\sqrt{2})$.

32. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$, calcule:

(a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ (b) $\dfrac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$ (d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $f(x) = \sqrt{g(a)}$

33. Calcular $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

(a) $f(x) = x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $f(x) = 4x^4$

34. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostre que $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{f(a)}{a^2}$

35. Se $f(x) = ax + b$ mostre que vale $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

36. Se $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ calcular:

(a) $f(-x)$ (b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $f\left(\dfrac{1}{1 - x}\right)$ (d) $f(f(x))$

37. Determine o domínio das seguintes funções

(a) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x + 2}{x + 1}}$ (d) $f(x) = 4\sqrt{\dfrac{-8x + 12}{x + 5}}$

(e) $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$ (f) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$

(g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$ (h) $\sqrt{\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}}$

38. As funções $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : I\!R \to I\!R$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.

39. As funções f e g, cujas regras são dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Explique.

40. Uma função f com domínio $A \subset I\!R$ é *par* se $f(-a) = f(a)$ para todo a em A tal que $-a \in A$, e *ímpar* se $f(-a) = -f(a)$. Determine em cada alternativa abaixo se f é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.

(a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ (b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$ (c) $f(x) = 9 - 5x^2$
(d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ (e) $f(x) = -2$ (f) $f(x) = 2x^3 + x^2$
(g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$
(j) $f(x) = |x| + 5$ (k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (l) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

41. Classifique as funções seguintes como injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.
(a) $f : I\!R \to I\!R$ tal que $f(x) = 2x - 1$
(b) $g : I\!R \to I\!R_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
(c) $h : I\!R \to I\!R_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
(d) $m : I\!N \to I\!N$ tal que $m(x) = 3x + 2$
(e) $p : I\!R^* \to I\!R^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$ (onde $I\!R^* = I\!R - \{0\}$)
(f) $q : I\!R \to I\!R$ tal que $q(x) = x^3$
(g) $r : I\!R \to I\!R$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$

42. Seja $f : A \to [-9, -1[$ dada por $f(x) = \dfrac{3+4x}{3-x}$. Pede-se:
(a) Determinar A.
(b) Mostrar que f é injetora.
(c) Verificar se f é sobrejetora.

43. Seja $f : A \to]1, 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4-11x}{4-2x}$. Pede-se:
(a) Determinar A.
(b) Mostrar que f é injetora.
(c) Verificar se f é sobrejetora.

44. Se $f(x) = 4x - 3$ mostre que $f(2x) = 2f(x) + 3$.

45. Em cada item a seguir encontre a equação da reta que passa pelo par de pontos

(a) (3,2) e (-2,4) (b) (1,1) e (2,-2)
(c) (-3,-3) e (4,9) (d) (-1,-3) e (-2,5)
(e) (0,0) e (3,2) (f) (5,0) e (0,5)
(g) (-2,-3) e (5,-7) (h) $\left(\dfrac{1}{5}, 2\right)$ e $\left(\dfrac{5}{2}, -2\right)$
(i) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$ e $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

46. Nos itens a seguir encontre a equação da reta que possui inclinação m, e que passa pelo ponto dado.

(a) $m = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$
(b) (-2,5), $m = -\frac{2}{3}$
(c) $m = 1$, $(-4, -3)$
(d) $m = -1$, $(-3, -3)$
(e) (0,3), $m = -2$
(f) (3,0), $m = 2$
(g) (-4,3), $m = 0$
(h) (1,-3), $m = 0$

47. O gráfico de uma função linear, f, tem coeficiente angular $m = 2$. Se $(-1, 3)$ e $(c, -2)$ pertencem ambos ao gráfico de f, encontre o número c.

48. Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação.

(a) $3x + y - 1 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$
(b) $-2x + 3y - 6 = 0$ e $-2x + 3y + 3 = 0$
(c) $-2x + 5y + 30 = 0$ e $5x + 2y - 2 = 0$
(d) $-x + y - 2 = 0$ e $x + y - 2 = 0$
(e) $y - 3x = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$
(f) $y + x + 1 = 0$ e $2y + 2x + 1 = 0$

49. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ e que é perpendicular à reta $y = 5x + 3$.

50. Encontre a equação das retas paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$ e que passa pelo ponto $(1, 5)$.

51. Seja $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = \frac{3x - 1}{4}$. Para que valores do domínio a imagem é menor que 4?

52. Para que valores de $x \in I\!R$ a função $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ é negativa?

53. O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um *custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de *custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R\$ 10.000,00 e os custos variáveis de R\$ 200,00 por hectare. Seja C o custo total, calculado em milhares de reais, e x o número de hectares plantados.

(a) Encontre uma fórmula para C em função de x.
(b) Esboce o gráfico de C *versus* x.
(c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico.

54. Pimentas picantes foram graduadas de acordo com as unidades de Scoville, em que o nível máximo de tolerância humana é de 14.000 Scovilles por prato. O Restaurante Costa Oeste, conhecido por seus pratos picantes, promete um prato especial do dia, que irá satisfazer ao mais ávido aficcionado por pratos apimentados. O restaurante importa pimentas indianas, graduadas em 1.200 Scovilles cada, e pimentas mexicanas, com uma graduação de 900 Scovilles cada.

(a) Determine a equação de restrição de Scoville, relacionando o número máximo de pimentas indianas e mexicanas que o restaurante deve utilizar na composição do prato especial.

(b) Resolva a equação da parte (a) obtenha, explicitamente, o número de pimentas indianas usadas nos pratos mais picantes em função do número de pimentas mexicanas.

55. Valores correspondentes a p e q são dados na tabela a seguir:

p	1	2	3	4
q	950	900	850	800

(a) Determine q como uma função linear de p.
(b) Determine p como função linear de q.

56. Uma função linear foi utilizada para gerar os valores da tabela a seguir. Encontre esta função.

x	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
y	27,8	29,2	30,6	32,0	33,4

57. Sabe-se que um triângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y, expresse y como função de x. Expresse a área desse triângulo como função de x.

58. Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a tem lados x e y, sendo que y está sobre o diâmetro a. Expresse y em função de x. Expresse a área do retângulo em função de x.

59. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo retângulo ABC, em função da base a e da altura h.

60. Determine o menor valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

61. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

62. Qual deve ser o valor de c para que o vértice da parábola $y = x^2 - 8x + c$ esteja sobre o eixo dos x?

63. Qual deve ser o valor de k para que $y = 2x^2 - kx + 8$ tenha duas raízes reais e iguais?

64. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

65. Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

66. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e o vértice que está fora dos eixos pertencente à reta $y = -4x + 5$.

67. Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que a soma das áreas das figuras seja a menor possível?

68. Se a distância de frenagem d (em metros) de um carro a velocidade de c km/h é dada, aproximadamente, por $d = v + \dfrac{v^2}{20}$, para quais velocidades o espaço de frenagem é inferior a 20m?

69. Considerando que a resistência elétrica R (em Ohms) para um fio de metal puro está relacionado com a temperatura T (em °C) pela fórmula $R = R_0(1 + \alpha T)$ onde α, R_0 são constantes positivas, pede-se:

(a) Para que temperatura tem-se que $R = R_0$?
(b) Se a resistência é considerada 0 para $T = -273°C$, determine o valor de α.
(c) Se a prata tem resistência $1,25$ ohms a 0°C a que temperatura sua resistência atinge $2,0$ ohms?

70. As dosagens para adultos e para crianças devem ser especificadas nos produtos farmacêuticos. Duas das fórmulas para se especificar as dosagens para crianças a partir das dosagens para adultos são a de Cowling, dada por $y = \dfrac{1}{24}(t+1)\alpha$ e a de Friend, dada por $y = \dfrac{2}{25}t\alpha$ onde α representa a dosagem para adulto, em mg, e t representa a idade da criança, em anos.

(a) Se $\alpha = 100$mg, represente graficamente as expressões das dosagens infantis usando as fórmulas de Cowling e de Friend.
(b) Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?