

LISTA 5: Operadores compactos

Exercício 1 *Mostre que $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dado por $T((x_j)) = (x_j/j)$ é compacto.*

Exercício 2 *Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ um operador compacto. Mostre que se $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é ortonormal, então $\|Te_j\| \rightarrow 0$. Vale a volta?*

Exercício 3 *Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ um operador compacto e bijetor. Se $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, então T^{-1} não é contínuo.*

Exercício 4 *Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Mostre que $\text{Im}(T)$ não possui subespaço fechado com dimensão infinita. Em particular, se T é bijetor então $\dim(\mathcal{H}_2) < \infty$.*

Exercício 5 *Sejam $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ e E um subespaço fechado invariante por T . Mostre que a restrição $T|_E$ é compacta.*

Exercício 6 *Sejam $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ base ortonormal de \mathcal{H} e considere $P_N : \mathcal{H} \rightarrow \text{Lin}(e_j, 1 \leq j \leq N)$ a projeção ortogonal. Podemos ter P_N convergindo para I ?*