`Análise Funcional`

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 6: Espaços Normados`

Exercício 1 *Mostre que uma métrica d num espaço vetorial X é induzida por uma norma se, e somente se,*

$$d(x+y, z+y) = d(x,z) \quad e \quad d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$$

Exercício 2 *Considere $C^1[a,b]$ o conjunto das funções de classe C^1 definidas em $[a,b]$. Defina*

$$\|\psi\|_{C^1} = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |\psi'(t)|.$$

Mostre que $(C^1[a,b], \|\cdot\|_{C^1})$ é Banach. Como deveria ser a norma em $C^k[a,b]$?

Exercício 3 *Considere os seguintes espaços de sequências numéricas:*

$$c = \{\textit{sequências convergentes}\} \quad e \quad c_0 = \{\textit{sequências convergentes a zero}\}$$

(a) Mostre que c e c_0 são espaços fechados de ℓ^∞ (portanto são de Banach).

(b) Mostre que se $\eta \in c$, então existe $\xi \in c_0$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ tais que

$$\eta = \xi + x, \quad \textit{sendo}\ , x = (\alpha, \alpha, \ldots).$$

Exercício 4 *Considere $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados, $\widehat{\mathcal{N}}_1$, $\widehat{\mathcal{N}}_2$ seus completamentos e $\varphi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ uniformemente contínua. Mostre que φ possui única extensão uniformemente contínua $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{N}}_1 \to \widehat{\mathcal{N}}_1$.*

Exercício 5 *Mostre que se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ então $Ker(T)$ é fechado. Mostre que $S : \ell^1 \to \ell^1$ dado por*

$$(Sx)_n = (x_n/n)$$

é fechado. Além disso, o operador inverso S^{-1} existe, mas não é fechado.

Exercício 6 *Seja f uma aplicação linear $f : \mathcal{N} \to \mathbb{K}$. Mostre que $f \in \mathcal{N}^*$ se, e somente se, $Ker(f)$ é fechado.*

Exercício 7 *Verifique se o núcleo a aplicação $f : (\ell^1, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$ dado por*

$$f(\{x_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

é fechado.

Exercício 8 *Seja X um subespaço fechado e próprio de $\mathcal{N}$. Se para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$ tem-se $(I-T)(\mathcal{N}) \subset X$, mostre que dado $\alpha \in (0,1)$, existe $\eta \in \mathcal{N}$, com $\|\eta\| = 1$, de modo que*

$$\inf_{x \in X} \|Tx - T\eta\| \geqslant \alpha.$$

Exercício 9 *Seja $\psi : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Mostre que $\psi(\alpha x) = \alpha\psi(x)$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 10 *Fixado $a \in \mathbb{R}$ defina em $C[-1,1]$ a aplicação*

$$f_a(\phi) = \int_{-1}^{1} \psi(t)dt + a\psi(0).$$

1. *Mostre que $f_a \in C[-1,1]^*$.*
2. *Calcule $\|f\|$.*

Exercício 11 *Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável de forma que, $|\psi'(t)| \leqslant \alpha < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que ψ é uma contração. (Como generalizar para $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?)*

Exercício 12 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$ com $\|T^n\| < 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostre que dado $\eta \in \mathcal{B}$, existe única solução do problema $\xi - T\xi = \eta$.*

Exercício 13 *Considere o conjunto $Q = [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}\}$ e $K : Q \to \mathbb{R}$ contínua de modo que*

$$|K(t,s,u) - K(t,s,v)| \leqslant L|u-v|, \ \forall (t,s,u),(t,s,v) \in Q,$$

com $L > 0$. Para $\varphi \in C[a,b]$ defina

$$T(\psi)(t) = \int_a^t K(t,s,\psi(s))ds + \varphi(t).$$

1. *Use indução para mostrar que*

$$|T^n(f)(t) - T^n(g)(t)| \leqslant \frac{L^n(t-a)^n}{n!}\|f-g\|_\infty.$$

2. *Para n grande temos que T^n é uma contração.*

Exercício 14 *Considere $\mathcal{N}_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ uma coleção de espaços normados. Mostre que todas as normas em*

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j$$

são equivalentes.