

Lista 3 - Espaços e subespaços vetoriais

Nota: A menos que enunciado de outra maneira, V denota um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, com $\mathbb{K}$ um corpo.

1. Determine se as seguintes trincas de dados são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$:
 - (a) $V = \mathbb{R}^2$ com $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ e a multiplicação por escalar usual.
 - (b) $V = \mathbb{R}^2$ com $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\max\{x_1, x_2\}, \max\{y_1, y_2\})$ e a multiplicação por escalar usual.
 - (c) $V = \mathbb{R}^2$ com $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, y_1 + x_2)$ e a multiplicação por escalar usual.
2. Verdadeiro ou falso:
 - (a) Um espaço vetorial pode ter mais de um vetor zero.
 - (b) Se f e g são polinômios de grau n então $f + g$ é um polinômio de grau n .
3. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é chamado de um espaço vetorial real. Mostre que todo espaço vetorial real é também um espaço vetorial racional, isto é, um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.
4. Mostre que se $a \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ com $av = 0$ então ou $a = 0$ ou $v = 0$.
5. Para os subconjuntos W abaixo, determine quais são subespaços vetoriais de V :
 - (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.
 - (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1x_2x_3 = 0\}$.
 - (c) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 = 5x_3\}$.
 - (d) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V : p'(0) = 0\}$.
 - (e) $V = M_n(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in V : \text{tr}(A) = 0\}$.
 - (f) $V = M_n(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in V : \det(A) = 0\}$.
6. Para os que são subespaços no item anterior encontre um conjunto gerador.
7. Para $V = \mathbb{R}^4$ e $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ determine se V é gerado por S .
8. Sejam W_1 and W_2 subespaços de V . Mostre que $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V . A união $W_1 \cup W_2$ é subespaço?
9. Verdadeiro ou falso:
 - (a) Se W_1, W_2 , e W_3 são subespaços de V tais que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$. Então $W_1 = W_2$.
 - (b) Se W_1, W_2 , e W_3 são subespaços de V tais que $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$. Então $W_1 = W_2$.