

Lista 4 - Dependência linear, base e dimensão

Nota: A menos que enunciado de outra maneira, V denota um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, com $\mathbb{K}$ um corpo.

1. Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, e $v_3 = (2, -1, 1)$ são l.i. em $\mathbb{R}^3$. Escreva $v = (1, -2, 5)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .
2. Verifique se as seguintes famílias de vetores são l.i., encontre base para os subespaços que elas geram e complete a base encontrada a uma base de V .

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ com $v_1 = (2, -1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 2, -1, 0)$, $v_3 = (0, -1, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, -1, 2)$.

(b) $V = \mathbb{R}^5$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ com $v_1 = (0, 1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0, -1)$, $v_4 = (-1, 1, 1, 2, 0)$ e $v_5 = (0, 0, 1, 1, -1)$.

(c) $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ com $p_1(t) = 1+t+t^2+3t^3+2t^4$, $p_2(t) = 1+2t+t^2+2t^3+t^4$, $p_3(t) = 1+3t+2t^2+t^3+2t^4$.

(d) $V = M_2(\mathbb{Q})$, $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) $V = M_2(\mathbb{R})$, $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Determine a dimensão de cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$

(a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = 0\}$.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = x_1 + x_2\}$.

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = x_1 + x_2, x_3 = x_1 - x_2\}$.

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = x_1 + x_2, x_3 = x_1 - x_2, x_3 + x_4 = 2x_1\}$.

4. Considere os vetores $w_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $w_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$, $w_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $u_1 = (0, 0, 1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 0, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^5$ e os subespaços $W = [w_1, w_2, w_3]$ e $U = [u_1, u_2, u_3]$.

(a) Calcule a dimensão de W, U e $U \cap W$.

(b) Determine se $\mathbb{R}^5 = W + U$.

(c) Encontre um subespaço V de $\mathbb{R}^5$ tal que $\mathbb{R}^5 = W \oplus V$

5. Encontre base para os seguintes subespaços de $V = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ e complete-as a uma base de V .

(a) $U = \{p \in V : p(1) = 2p'(0)\}.$

(b) $W = [B]$ com $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ e

$$p_1(t) = t^2 - 2, \quad p_2(t) = t - t^4, \quad p_3(t) = 1 + t + t^2 + t^4, \quad p_4(t) = 2t^2 + 2t - 1, \quad p_5(t) = t^4 + 3t(1 + t).$$

(c) $U \cap W$, sendo U como em (a) e W como em (b).

(d) $U + W$, sendo U como em (a) e W como em (b).

6. Mostre que o conjunto dos números complexos é um espaço vetorial real bidimensional.

7. Escreva uma base para os subespaços W de $M_3(\mathbb{R})$:

(a) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}^3) : \text{tr } A = 0\}.$

(b) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}^3) : A \text{ é simétrica}\}. \quad (A^T = A)$

(c) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}^3) : A \text{ é antissimétrica}\}. \quad (A^T = -A)$

8. Suponha que U e W são subespaços de V e que V tenha dimensão finita. Mostre que vale a seguinte relação entre dimensões:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

9. (a) Se V possui dimensão finita e $W \subseteq V$ é subespaço de V tal que $\dim(W) = \dim(V)$, mostre que $W = V$.

(b) Dê um exemplo de espaço vetorial V que contém um subespaço **próprio** W tal que $\dim(W) = \dim(V)$.