

Lista 5 - Transformações lineares

Nota: A menos que enunciado de outra maneira, V denota um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, com $\mathbb{K}$ um corpo.

- Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Mostre que uma função $T : V \rightarrow W$ é linear se, e somente se, $T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v_1, v_2 \in V$.
- Em cada item, determine se a função $T : V \rightarrow W$ dada é linear. Para as que forem, determine seu núcleo e imagem. Encontre uma base para cada um destes subespaços e exiba sua dimensão.
 - $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}^2$ e $T(a + bt + ct^2) = (2a + b - c, 3a - 2b)$.
 - $V = \mathbb{R}^2$, $W = M_2(\mathbb{R})$ e $T(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & -y \\ 2x - y & 2y \end{pmatrix}$.
 - $V = W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $(T(p))(t) = tp'(t) + 3p(t)$.
 - $V = W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $p(t) \mapsto p(4t) + tp''(0)$.
 - $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(p) = (p(-1), p(0), p(1), p(2))$.
 - $V = W = M_2(\mathbb{R})$ e $T(A) = A^2$.
 - $V = W = M_3(\mathbb{Q})$ e $T(A) = 2A + I$.
- Para cada transformação linear T abaixo, encontre bases para os subespaços indicados.
 - $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $T(x, y, z) = (x + 3z - 2y, y - z, 2x + y)$, $T(U)$ com $U = [(1, 2, 3), (1, -1, 0)]$ e $T^{-1}(W)$ com $W = [e_1, e_3]$. ($T^{-1}(W) := \{v \in V : Tv \in W\}$)
 - $T : \mathbb{Q}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & 2x + y \\ 2y - x - 5z & 2z - y \end{pmatrix}$, $T(U)$ com $U = [(1, 2, 3), (1, -1, 0)]$ e $T^{-1}(W)$ com W o subespaço das matrizes simétricas.
 - $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}^4$ determinada por $T(1 + t) = (1, 0, 1, 0)$, $T(2 + t^2) = (0, -1, 0, 1)$, $T(3t) = (0, 2, 0, 0)$. Encontre $T(\mathcal{P}_1(\mathbb{Q}))$ e $T^{-1}(W)$ com $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 + x_4 = 0\}$.
- Sejam V e W $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais com $\dim V < \infty$ e U um subespaço de V . Dado $S \in \mathcal{L}(U, W)$ mostre que existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $T(u) = S(u)$ para todo $u \in U$.
- Sejam V e W $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e suponha que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é injetora. Dado um conjunto de V linearmente independente $\{v_1, \dots, v_n\}$ mostre que $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ é l.i. em W .
- Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e suponha que $S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $T \in \mathcal{L}(V, W)$ são injetoras. Mostre que a composição $T \circ S$ é injetora.
- Sejam V e W espaços vetoriais e suponha que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é sobrejetora. Dado um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ gerador de V , mostre que $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ gera W .
- Seja $T \in \mathcal{L}(V, V)$. É verdade que $V = \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T)$? E se adicionarmos a hipótese $T^2 = T$.

9. Sejam U, V, W espaços vetoriais de dimensão finita e $S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Mostre que $\dim(\mathcal{N}(T \circ S)) = \dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(\mathcal{N}(S))$.
10. Para os itens do Exercício 2, escolha bases para os espaços V e W e dê a representação matricial de T nestas bases.
11. Para os itens do Exercício 2, escolha bases não canônicas para V e W e dê a representação matricial de T nestas bases. Exiba a matriz de mudança de base da base canônica para a base escolhida.