

Lista 6 - Operadores diagonalizáveis

Nota: A menos que enunciado de outra maneira, V denota um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, com $\mathbb{K}$ um corpo.

1. Mostre que se $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é injetora então $\dim V = \dim \text{Im}(T)$.
2. É verdade que se $T \in \mathcal{L}(V, V)$ então $V = \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T)$?
3. Suponha $\dim V < \infty$ e considere $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$. O espaço V^* é chamado de espaço dual de V e seus elementos são chamados funcionais lineares. Construa uma base de V^* e conclua que $\dim V^* = \dim V$.
4. Para cada operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ dado abaixo, encontre bases para os autoespaços de T e determine se T é diagonalizável.
 - (a) $V = \mathbb{Q}^2$; $T(x, y) = (3y + x, x - y)$.
 - (b) $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$; $T(a + bt) = 4a + b + (6a + 3b)t$.
 - (c) $V = \mathbb{C}^2$; $T(x, y) = (y, -x)$.
 - (d) $V = \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, y + 2z)$.
 - (e) $V = \mathbb{Q}^3$; $T(x, y, z) = (-3x - 4y, 2x + 3y, -z)$.
 - (f) $V = \mathbb{C}^3$; $T(x, y, z) = (x + (1 + 2i)y, (1 - 2i)x + iz, z - iy)$.
 - (g) $V = \mathbb{R}^4$; $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_2, -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4, 2x_1 - 2x_2 + 3x_4)$.
 - (h) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$; $T(a + bt + ct^2) = 2a + b + c + (2a + 3b + 2c)t + (3a + 3b + 4c)t^2$.
 - (i) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$; $T(p(t)) = p(t) + tp''(t)$.
 - (j) $F = \mathbb{Q}$ e existe base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V satisfazendo $T(v_1) = -4v_2 - 2v_3$; $T(v_2) = v_1 + 4v_2 + v_3$; $T(v_3) = 2v_3$ e $T(v_4) = 2v_2 - v_3 + v_4$.
5. Determine se cada uma das matrizes A dadas a seguir são diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em caso afirmativo, encontre matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal e calcule $P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. & \text{(b)} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}. & \text{(c)} A &= \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{(d)} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}. & \text{(e)} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}. & \text{(f)} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
 \text{(g)} A &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dizemos que um subespaço W de V é invariante sobre um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ (ou T -invariante) se $T(W) \subseteq W$, ou seja, $T(w) \in W$, para todo $w \in W$.

6. Sejam U e W subespaços T -invariantes de V . Mostre que $U + W$ e $U \cap W$ são também T -invariantes.
7. Se T é bijetor e λ é um auto valor de T mostre que λ^{-1} é um auto valor de T^{-1} .
8. Mostre que se todo vetor $v \in V$ é auto vetor de T então T é um múltiplo da identidade.