

Lista 7 - Espaços vetoriais com produto interno

Nota: A menos que enunciado de outra maneira, V denota um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

- Determine se as seguintes funções definem um produto interno no espaço vetorial indicado
 - $V = \mathbb{R}^2$ e $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + ay_1y_2$, com $a \in \mathbb{R}$.
 - $V = \mathbb{R}^3$ e $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1$.
 - $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\langle a_1 + b_1t + c_1t^2, a_2 + b_2t + c_2t^2 \rangle = 5a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2b_1b_2 + 2a_1c_2 + 2a_2c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 + 2c_1c_2$

- $V = \mathbb{R}^3$ e $\langle v, w \rangle = [w]_{can}^t A [v]_{can}$ onde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Dado um espaço com produto interno V de dimensão finita e uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , defina a matriz de Gram de β é a matriz G_β , $n \times n$, cujas entradas são dadas por

$$(G_\beta)_{i,j} = \langle v_j, v_i \rangle.$$

Para os itens do exercício anterior, determine a matriz de Gram com respeito a base canônica e alguma outra base de sua preferência.

- Mostre que a matriz de Gram como definida acima satisfaz a seguinte igualdade

$$[w]_\alpha^t G_\alpha [v]_\alpha = \langle v, w \rangle, \quad \text{para todo } v, w \in V.$$

- Uma matriz A simétrica de ordem n é dita ser *positiva definida* se $X^t A X > 0$ para toda matriz $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Mostre que se A é uma matriz simétrica positiva definida então

$$\langle v, w \rangle := [w]_\alpha^t A [v]_\alpha, \quad v, w \in V,$$

define um produto interno em V , para qualquer escolha de base α de V .

- Seja $\mathcal{C}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ (funções contínuas com domínio $[-\pi, \pi]$) e considere o produto interno dado pela integral do produto no mesmo intervalo. Dado um $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ verifique que o conjunto de vetores

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\pi}, \frac{\sin(2x)}{\pi}, \dots, \frac{\sin(nx)}{\pi}, \frac{\cos x}{\pi}, \frac{\cos(2x)}{\pi}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\pi} \right\},$$

é ortonormal.

- Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ dados por $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -2, 1)$, e $v_3 = (1, 2, -1)$. Aplique o processo de Gram-Schmidt para a base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ para encontrar uma base ortonormal.
- Encontre em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ uma base ortonormal para o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- Seja U um subespaço de V . Mostre que o complemento ortogonal $U^\perp$ de U com respeito ao produto interno de V satisfaz

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U).$$

9. Considere o espaço vetorial $V = R^3$ equipado com o produto interno $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1$.
- (a) Calcule $W^\perp$ sendo W o subespaço de V gerado por $\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$.
- (b) Encontre $\text{proj}_W(p)$, $\text{proj}_{W^\perp}(p)$ para todo $p \in V$.
10. Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ equipado com o produto interno $\langle a_1 + b_1t + c_1t^2, a_2 + b_2t + c_2t^2 \rangle = 5a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2b_1b_2 + 2a_1c_2 + 2a_2c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 + 2c_1c_2$.
- (a) Calcule $W^\perp$ sendo W o subespaço de V gerado por 1 e t^2 .
- (b) Encontre $\text{proj}_W(p)$ e $\text{proj}_{W^\perp}(p)$ para todo $p \in V$.
11. Seja $P : V \rightarrow V$ linear satisfazendo as seguintes propriedades:
- (i) Dado qualquer vetor $v \in V$, $P(P(v)) = P(v)$;
- (ii) Dados quaisquer vetores $u \in \mathcal{N}(P)$ e $v \in \text{Im}(P)$ temos $\langle u, v \rangle = 0$.
- Mostre que P é uma projeção ortogonal.
12. Suponha que U e W sejam subespaços de V . Mostre que
- (a) $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ e, se $V = W \oplus W^\perp$, então $W = (W^\perp)^\perp$.
- (b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
- (c) $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$.
- (d) Se $V = U \oplus U^\perp = W \oplus W^\perp$, então $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$.