

Lista 8 - Espaços vetoriais com produto interno II

Nota: A menos que enunciado de outra maneira, V denota um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

1. Uma matriz M de ordem $m \times n$ é semidefinida positiva se $x^T M x \geq 0$, para todo $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Seja A $m \times n$.
(a) Mostre que $A^T A$ é semidefinida positiva.
(b) Mostre que $A^T A$ é definida positiva se e somente se as colunas de A são LI.
2. Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{N}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$.
3. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ espaço com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Defina $T(a + bx + cx^2) = bx$.

- (a)** Mostre que T não é auto adjunto.
- (b)** A matriz de T com respeito a base canônica é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é simétrica. Explique por que isso não contradiz o item (a).

4. Encontre, quando existir, uma base ortogonal de V formada por autovetores dos operadores dados.
(a) $V = \mathbb{R}^2$ com produto interno usual e $T(x, y) = (-y, x)$.
(b) $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e $T(x, y, z) = (-4x - y + 2z; -x - y - z; 2x - y - 4z)$
(c) $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.
(d) $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e $T(x, y, z) = (-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$
(e) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ equipado com o produto interno

$$\langle a_1 + b_1 t + c_1 t^2, a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \rangle = 5a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2b_1 b_2 + 2a_1 c_2 + 2a_2 c_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1 + 2c_1 c_2,$$

e $T(p)(t) = p'(t)$ para todo.

5. Seja A uma matriz quadrada e simétrica. Pelo Teorema Espectral existe invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Mostre que $P^{-1} = P^T$.
6. Seja V um espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de dimensão finita. Mostre que Pr_W é auto-adjunta.

Nos exercícios abaixo, considere $T : V \rightarrow U$, V e U de dimensão finita, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ os valores singulares associados aos vetores singulares $\beta = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ à esquerda e à direita, respectivamente.

- (a)** Uma transformação $S : U \rightarrow V$ é dita uma pseudo-inversa (de Moore-Penrose) de T se satisfaz as seguintes propriedades:

- $STS = S$,
- $TST = T$,

- $(ST)^* = ST$,
- $(TS)^* = TS$.

Mostre que

- (i) se T tem inversa, então a inversa é uma pseudo-inversa;
 - (ii) se $N(T) = \{0\}$, então $(T^*T)^{-1}T^*$ é uma pseudo-inversa;
 - (iii) $N(T) = N(ST)$, $N(S) = N(TS)$, $Im(T) = Im(TS)$, $Im(S) = Im(ST)$;
 - (iv) $N(T) \perp Im(S)$ e $N(S) \perp Im(T)$;
 - (v) ST e TS são operadores de projeção ortogonal, indicando em que subespaço eles projetam.
- (b) Encontre os valores singulares das transformações nula e identidade.
- (c) Se T é auto-adjunta, encontre uma relação entre os valores singulares e os autovalores.
- (d) Mostre que

$$\sigma_r \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sigma_1, \quad \forall x \neq 0,$$

e que existem vetores que satisfaz a igualdade.

- (e) Dado $x \in V$, encontre a projeção ortogonal de x no núcleo de T em função dos vetores singulares.
- (f) Considere os operadores $A \in \mathcal{L}(V \times U)$ e $B \in \mathcal{L}(U \times V)$, dados por

$$A(x, y) = (T^*y, Tx), \quad B(x, y) = (Ty, T^*x).$$

Encontre os autovalores e autovetores de A e B .

- (g) Mostre que a transformação S dada por $[S]_{\alpha}^{\beta} = ([T]_{\beta}^{\alpha})^T$ é uma pseudo-inversa de T .
- (h) Quais os valores singulares de uma matriz ortogonal?