

Lista 1 - Fundamentos

1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se for possível calcule:

- $AB - BA$,
 - $2C - D$,
 - $(2D^t - 3E^t)^t$,
 - $D^2 - DE$.
2. Tente decidir se a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ é invertível e, em caso afirmativo, tente encontrar sua inversa (estudaremos método para resolver este tipo de exercício futuramente).
3. Suponha que $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ sejam matrizes invertíveis e mostre que:
- A^t é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
 - AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
- Se A e B são matrizes satisfazendo $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
 - Se A é uma matriz quadrada satisfazendo $A^3 = A$, então $A = I$ ou $A = 0$.
 - Se A e B são matrizes $n \times n$, então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
 - Se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = BA$.
 - Se A é uma matriz quadrada que comuta com qualquer outra matriz do mesmo tamanho, então A é diagonal.
 - Se A e B são matrizes tais que AB está definido e resulta numa matriz invertível, então A e B são quadradas e invertíveis.
5. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{bmatrix}$, em que y é uma número real não nulo, verificam a equação $x^2 = 2x$.
6. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que A é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.
7. Resolva os seguintes sistemas usando escalonamento:
- $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$
8. Os sistemas lineares seguintes possuem a mesma matriz A . Resolva-os usando o método de Gauss- Jordan. Observe que os dois sistemas podem ser resolvidos ao mesmo tempo

escalando a matriz aumentada $[A|B_1|B_2]$.

$$(a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

9. Para cada sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1 \end{cases}.$$

10. Dado $m \in \mathbb{N}$, considere as matrizes $m \times m$, $E^{k,\ell}$ definidas por $(E^{k,\ell})_{i,j} = \delta_{k,i}\delta_{\ell,j}$, para todo $1 \leq i, j \leq m$. Ou seja, são matrizes com entrada 1 na coordenada (k, ℓ) e 0 em todas as outras coordenadas. Por exemplo, a matriz identidade

$$I_m = E^{1,1} + E^{2,2} + \dots + E^{m,m}.$$

Considere as seguintes matrizes $m \times m$ definidas a partir destas matrizes elementares:

$$P^{i,j} = I_m - E^{i,i} - E^{j,j} + E^{i,j} + E^{j,i},$$

$$E(ci) = I_m + (c - 1)E^{i,i}, \quad E(ci, j) = I_m + cE^{j,i}.$$

Estas são chamadas de *matrizes elementares*.

(a) Esboce a forma genérica destas matrizes.

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ verifique que

(b) $P^{i,j}A$ é igual a matriz obtida de A permutando as linhas i e j .

(c) $E(ci)A$ é igual a matriz obtida de A multiplicando sua linha i por c .

(d) $E(ci, j)A$ é igual a matriz obtida de A multiplicando a linha i por c e somando-a a linha j . Sabendo as propriedades (b)-(d), deduza uma matriz inversa e verifique que cada uma das matrizes acima definidas é invertível.

11. Determine as matrizes inversas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

12. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m < n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Mostre que BA não é invertível. E AB ?

13. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Se A é uma matriz $m \times n$ com $m < n$, então o correspondente sistema homogêneo possui infinitas soluções.

(b) Se A é uma matriz invertível, então ela não é a matriz aumentada de um sistema linear solúvel.

(c) Se A é uma matriz $m \times n$ com $m < n$ e existe matriz B $n \times m$ tal que $AB = I_m$, então todo sistema linear tendo A como matriz principal tem soluções múltiplas.

(d) Se A é uma matriz $m \times n$ com $m > n$, então sua forma escalonada reduzida tem exatamente $m - n$ linhas nulas.

(e) Se A é uma matriz $m \times n$ com $m > n$ e algum sistema linear tendo A como matriz

principal possuir solução única, então sua forma escalonada reduzida tem exatamente $m - n$ linhas nulas.