Análise 3 - Segunda avaliação - 6/11/2026
Gabarito

As soluções abaixo indicam os argumentos esperados. Outras soluções corretas, baseadas nos resultados estudados em aula, também serão consideradas.

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \|x\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Prove que f é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Pela desigualdade triangular

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\|^2 - \|y\|^2\big| = \big|\|x\| - \|y\|\big|(\|x\| + \|y\|) \leq \|x - y\|(\|x\| + \|y\|).$$

Dado $y \in \mathbb{R}^n$, se $\|x - y\| < 1$, então $\|x\| - \|y\| \leq 1 \implies \|x\| \leq 1 + \|y\|$, e

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|(\|x\| + \|y\|) \leq (1 + 2\|y\|)\|x - y\|.$$

Logo, dado $y \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \varepsilon/(1 + 2\|y\|)$ e teremos

$$|f(x) - f(y)| \leq (1 + 2\|y\|)\|x - y\| < (1 + 2\|y\|)\delta < \varepsilon,$$

sempre que $y \in \mathbb{R}^n$ e $\|x - y\| < \delta$. Isso prova que f é contínua em y. Como y é arbitrário, f é contínua em todo $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que, para todo $R > 0$, a restrição $f|_{B[0,R]}$ é lipschitziana.

Se $x, y \in B[0, R]$, então $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$ e da primeira desigualdade do item (a) temos

$$|f(x) - f(y)| \leq (\|x\| + \|y\|)\|x - y\| \leq 2R\|x - y\|.$$

Portanto, $f|_{B[0,R]}$ é lipschitziana, com constante $2R$.

(c) Mostre que f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.

Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor com $\|u\| = 1$ e tome

$$x_k = ku, \qquad y_k = \left(k + \frac{1}{k}\right) u.$$

Então $\|x_k - y_k\| = 1/k \to 0$, mas

$$|f(y_k) - f(x_k)| = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - k^2 = 2 + \frac{1}{k^2} \longrightarrow 2.$$

Pela caracterização sequencial da continuidade uniforme, f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.

Questão 2. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, conexo e não vazio, e seja $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

(a) Prove que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(K) = [a, b]$.

Como K é compacto e f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass existem $x_a, x_b \in K$ tais que

$$a := f(x_a) = \min_{x \in K} f(x), \qquad b := f(x_b) = \max_{x \in K} f(x).$$

Logo, $f(K) \subset [a, b]$ com $a, b \in f(K)$. Mas ainda não dá para afirmar

Além disso, como K é conexo e f é contínua, então $f(K)$ é conexo. Recordando que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ é um intervalo; então $f(K)$ é um intervalo com $a \leq f(x) \leq b$, para todo $x \in K$. Logo,

$$f(K) = [a, b].$$

(b) Prove que, para todo $c \in [a, b]$, existe $x \in K$ tal que $f(x) = c$.

Como $f(K) = [a, b]$, dado qualquer $c \in [a, b] = f(K)$, pela definição de imagem de um conjunto existe $x \in K$ tal que

$$f(x) = c.$$

Questão 3. Seja $M(n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais munido da norma espectral.

(a) Prove, a partir da definição de diferenciabilidade, que a aplicação $F : M(n) \longrightarrow M(n)$, definida $F(X) = X^2$ é diferenciável;

(b) Calcule a derivada $F'(X)H$, com $H \in M(n)$.

Fixe $X \in M(n)$. Para $H \in M(n)$,

$$F(X + H) - F(X) = (X + H)^2 - X^2 = XH + HX + H^2.$$

Note que a aplicação $L_X : M(n) \longrightarrow M(n)$ definida por $L_X(H) = XH + HX$ é linear. Além disso, pelas propriedade da norma espectral,

$$\frac{\|F(X + H) - F(X) - L_X(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| \longrightarrow 0 \qquad \text{(quando } H \to 0\text{)}.$$

Portanto, F é diferenciável em X e

$$F'(X)H = XH + HX.$$

Como X é arbitrário, F é diferenciável em todo $M(n)$.

Questão 5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear.

(a) Prove que existe $c > 0$ tal que $\|\varphi(x, y)\| \leq c\|x\| \, \|y\|$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Sejam $(e_i)_{i=1}^n$ e $(e'_j)_{j=1}^m$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Escrevendo $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, e $y = \sum_{j=1}^n y_j e'_j$, pela bilinearidade,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e'_j).$$

Se $C := \max_{i,j} \|\varphi(e_i, e'_j)\|$, então

$$\|\varphi(x, y)\| \leq C \sum_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{j=1}^{n} |y_j| = C\|x\|_1 \|y\|_1.$$

Como todas as normas em espaços vetoriais de dimensão finita são equivalentes, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|x\|_1 \leq C_1\|x\|, \qquad \|y\|_1 \leq C_2\|y\|.$$

Tomando $c = CC_1C_2$, teremos

$$\|\varphi(x, y)\| \leq c\|x\| \, \|y\|.$$

(b) Prove que φ é diferenciável e calcule $\varphi'(x, y)(h, k)$.

Para $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ temos

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = \varphi(h, y) + \varphi(x, k) + \varphi(h, k).$$

Defina

$$L_{(x,y)}(h, k) = \varphi(h, y) + \varphi(x, k).$$

A aplicação $L_{(x,y)}$ é linear. Pela estimativa do item anterior,

$$\|\varphi(h, k)\| \leq c\|h\|\|k\| \leq \frac{c}{2}(\|h\|^2 + \|k\|^2) = \frac{c}{2}\|(h, k)\|^2.$$

Consequentemente,

$$\frac{\|\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) - L_{(x,y)}(h, k)\|}{\|(h, k)\|} \leq \frac{c}{2}\|(h, k)\| \longrightarrow 0.$$

Portanto, φ é diferenciável e

$$\varphi'(x, y)(h, k) = \varphi(h, y) + \varphi(x, k).$$

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \big(x^2 - y,\ x + y^2\big)$, e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(u,v) = u^2 + v^2$.

(a) Mostre que $g \circ f$ é diferenciável;

(b) Utilize a regra da cadeia para calcular $(g \circ f)'(x,y)$.

As funções coordenadas de f e g são polinomiais, logo f e g são diferenciáveis. Portanto, pela regra da cadeia, $g \circ f$ é diferenciável.

Temos

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}, \qquad g'(u,v)(r,s) = 2ur + 2vs.$$

Assim,

$$f'(x,y)(h,k) = (2xh - k,\ h + 2yk).$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y)(h,k) &= g'(f(x,y))\big(f'(x,y)(h,k)\big) \\ &= 2(x^2 - y)(2xh - k) + 2(x + y^2)(h + 2yk). \end{aligned}$$