Análise 3 - Segunda avaliação - 6/11/2026 - Prof. Kirilov

Nome: _____

Todas as respostas devem ser devidamente justificadas. Resultados vistos em aula podem ser utilizados, desde que sejam claramente indicados.

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \|x\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Prove que f é contínua em $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que, para todo $R > 0$, a restrição $f|_{B[0,R]}$ é lipschitziana.

(c) Mostre que f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.

Questão 2. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, conexo e não vazio, e seja $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

(a) Prove que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(K) = [a, b]$.

(b) Prove que, para todo $c \in [a, b]$, existe $x \in K$ tal que $f(x) = c$.

Questão 3. Seja $M(n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais munido da norma espectral.

(a) Prove, a partir da definição de diferenciabilidade, que $F : M(n) \to M(n)$, definida por $F(X) = X^2$, é diferenciável;

(b) Calcule a derivada $F'(X)H$, com $H \in M(n)$.

Questão 4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \big(x^2 - y,\ x + y^2\big)$, e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(u, v) = u^2 + v^2$.

(a) Mostre que f e g são diferenciáveis e conclua que $g \circ f$ é diferenciável;

(b) Utilize a regra da cadeia para calcular $(g \circ f)'(x, y)$.

Questão 5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear.

(a) Prove que existe $c > 0$ tal que $\|\varphi(x, y)\| \leq c\|x\|\,\|y\|$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

(b) Prove que φ é diferenciável e determine $\varphi'(x, y)(h, k)$.