Cálculo 2 -Aula de Exercícios 30/09

Departamento de Matemática - UFPR

Limite

Discuitir a existência do seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3 - y^3}$$

Este exercício não é fácil nem direto: aproveito porque contém muitas das dificuldades de análise de limites em várias variáveis. As tentativas usuais: ao longo da reta $x = 0$, $y = 0$, o limite dá zero.
Ao longo da reta $y = mx$ fica

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^4x^4}{x^3(1 - m^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x}{(1 - m^3)} = 0\,.$$

Mas aqui dá para perceber um problema: e se $m = 1$? O problema vêm do fato que a função *não está definida* para $x = y$ porque o denominador zera. Mas vejam que, na definição de limite, a função tem que se aproximar do limite para todo ponto *no domínio*. Então não estar definida na reta

Limite

Mas esta indefinição na reta $x = y$ dá uma dica de como podemos encontrar uma direção na qual o limite não existe. A ideia é nos aproximar da reta $x = y$ com uma velocidade comparável à velocidade da qual nos aproximamos da origem. Usemos coordenadas polares para expressar esta ideia. Assim, $x = r\cos(\theta), y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Antes de substituir, vai ajudar o fato que $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Substituindo agora, fica

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{r^3(\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta))(\cos^2(\theta) + \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta))}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r}{\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)} \frac{\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{1 + \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}$$

A parte ressaltada em azul não dá problema, já que é denominador nunca se anula.

Limite

Fazemos $\theta = \pi/4 + r$; isto define uma curva que se aproxima de $(0,0)$ quando $r \to 0$ se aproxiando da reta $x = y$ (porque $\theta \to \pi/4$ quando $r \to 0$).

E substituindo, $\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) = -\sqrt{2}\operatorname{sen}(r)$.
Quando $\theta \to \pi/4$, a parte azul do limite converge para $1/6$. A parte restante fica

$$\lim_{r\to 0} \frac{r}{-\sqrt{2}\operatorname{sen}(r)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Limite

Assim, *ao longo da curva descrita em coordenadas polares como* $\theta = \pi/4 + r$, temos que o limite quando $r \to 0$ é $\frac{-1}{6\sqrt{2}}$ que é diferente que ao longo das retas $x = 0$, por exemplo. Assim, o limite não existe.

Vejam que se nos aproximamos pela curva $\theta = \pi/4 + r^2$, nos aproximamos da reta $x = y$ mais rápido do que nos aproximamos da origem. Vejam como exercício que neste caso, o limite dá infinito.

Derivadas parciais

Vamos a resolver o seguinte exercício:

Mostre que a função

$$f(x, y) = \ln(x + 2t)$$

satisfaz a equação de onda

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial t^2} = 0$$

Calculemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + 2t}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 2\frac{1}{x + 2t}$$

Derivadas parciais

Primeira observação: esta conta *não* representa a regra da cadeia de várias variaveis; é simplesmente a regra da cadeia de cálculo 1:

$$(x, t) \mapsto x + 2t \mapsto \ln(x + 2t)$$

Mas em cada derivada parcial uma das variáveis está fixa, assim por exemplo $\frac{\partial f}{\partial t}(3, 2)$ é a derivada em t da função de cálculo 1

$$(3, t) \mapsto 3 + 2t \mapsto \ln(3 + 2t)$$

avaliada em $t = 3$.

Derivadas parciais

Derivemos mais uma vez,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x+2t} = \frac{-1}{(x+2t)^2}$$

,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{2}{x+2t} = \frac{-4}{(x+2t)^2}$$

Somando, $4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial t^2} = 0$, que é o que queríamos demostrar.

Exercício. Veja que o resultado não tem a ver com o logaritmo, se u é qualquer função real diferenciável, $f(x,y) = u(x+ct)$ e $g(x,y) = u(x-ct)$ satisfazem a equação de onda $c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial t^2} = 0$.

Regra da cadeia

Finalizemos com o seguinte exercício:
Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Suponha que $\vec{\nabla} f(1, 1) = (-8, 3)$.
Seja g a expressão de f em coordenadas polares, isto é, $g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))$.
Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial r}$ e $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ nos pontos:

1. $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$.
2. $r = 2$, $\theta = 2\pi/3$.

Usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Lembrem que esta expressão da regra da cadeia **É SÓ PARA LEMBRAR**. Se não especificar os pontos de aplicação, está errado.

Regra da cadeia

Então o certo é

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Regra da cadeia

Precisamos calcular as derivadas de x e y em relação a r e θ. Temos

$$\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\operatorname{sen}(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) = r\cos(\theta)$$

Substituindo, fica:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta) + r\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta)$$

Regra da cadeia

PRECISAMOS AVALIAR NOS PONTOS CERTOS

Lembremos

1. $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$.
2. $r = 2$, $\theta = 2\pi/3$.

Na primeira questão, temos $\cos(\theta) = \text{sen}(\theta) = \sqrt{2}/2$. Então $x = r\cos(\theta) = 1 = r\,\text{sen}(\theta) = y$.
Mas sabemos que $\vec{\nabla} f(1,1) = (-8, 3)$. Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(\sqrt{2}, \pi/4) = -8 \times \sqrt{2}/2 + 3 \times \sqrt{2}/2 = -5\sqrt{2}/2$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\sqrt{2}, \pi/4) = -\sqrt{2}\times(-8)\times\sqrt{2}/2 + 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}/2 = 8+3 = 11.$$

Regra da cadeia

VEJAM QUE NÃO PRECISAMOS SABER QUEM É A FUNÇÃO f! SÓ A INFORMAÇÃO DAS SUAS DERIVADAS NO PONTO DADO.

1. $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$.
2. $r = 2$, $\theta = 2\pi/3$.

E o segundo item? Simplesmente, não dá para fazer! Daí a importância de avaliar nos pontos certos: para $r = 2, \theta = 2\pi/3$, temos $x = -1, y = \sqrt{3}$, onde não temos informação nenhuma sobre as derivadas de f.

Derivada direcional 1

Seja $f(x, y)$ uma função tal que $\nabla f_{(1,1)} = (2, -3)$.

1a) Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$. Calcule $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=1}$.

1b) Calcule a derivada direcional de f na direção *noroeste*.

Derivada direcional 1

1a) Temos que $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$, e consequentemente, $\gamma'(1) = (2, 3)$. Notem que também, $\gamma(1) = (1, 1)$, **que é o mesmo ponto onde conhecemos o gradiente**. Por isso podemos usar a regra da cadeia, e fica

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=1} = \nabla f_{\gamma(1)} \gamma'(1) = \nabla f_{(1,1)} \gamma'(1) =$$

$$(2, -3) \cdot (2, 3) = 2 \times 2 + (-3) \times 3 = -5\,.$$

Derivada direcional 1

1b) A direção nor-oeste (na rosa dos ventos padrão) é a direção dos vetores da forma $\vec{u} = (-a, a)$. O vetor unitário correspondente é $\hat{u} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Assim

$$D_{\hat{u}} f_{(1,1)} = \nabla f_{(1,1)} \cdot \hat{u} = (2, -3) \cdot (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

$$= -5\sqrt{2}/2\,.$$

Derivada direcional:aplicação

Considere uma pessoa praticante do "trekking" que está caminhando por uma região cuja altura está dada, como função de coordenadas (x, y), por $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. No ponto de coordenadas $x = 0, y = -1$ (e consequentemente, altura $f = 1$), o "trekker":

- Na direção nordeste, está subindo ou descendo? Com qual taxa?
- Qual é a direção na qual sobe mais rápidamente? Com qual taxa?
- Se quiser permanecer na mesma altitude, quais são as melhores direções? Por que escrevi no plural?
- Saindo do ponto e caminhando na direção leste, só é subida o descida. Qual das duas opções?

Derivada direcional:aplicação

Para todo, precisamos do gradiente de f, avaliado no ponto $(0, -1)$:

$$\nabla f_{(x,y)} = (y^2 + 6x^2 + 10x\,, 2xy + 2y),\ \nabla f_{(0,-1)} = (1, -2)\,.$$

A variação infinitesimal de f na direção nordeste é o mesmo que a derivada direcional de f no ponto na direção de $\hat{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, ou seja

$$D_{\hat{u}} f_{(0,-1)} = (1, -2) \cdot (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}/2\,.$$

A taxa de crescimento de f nessa direção é $-\sqrt{2}/2$; como é negativa, estamos descendo.

Derivada direcional:aplicação

A direção de máximo crescimento é a direção do gradiente no ponto, isto é, a direção do vetor $(1, -2)$ (lembrem que eu permito definir uma direção por qualquer vetor que a represente). A taxa de crescimento na direção do gradiente é a norma do gradiente: $\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

As melhores direções para permanecer na mesma altura é tangente às curvas de nível, isto é, perpendiculares ao gradiente: a direção de $(2, 1)$ *e também a sua oposta* (daí o plural) $(-2, -1)$.

Derivada direcional:aplicação

Finalmente, indo na direção leste, subir ou descer corresponde respectivamente ao sinal de $\partial f/\partial x$ ser positiva o negativa. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 6x^2 + 10x,$$

Começamos em $x = 0, y = -1$, permanecemos com y constante, e indo na direção leste se traduz em $x \geq 0$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-1) = 1 + 6x^2 + 10x,$$

Que para $x \geq 0$, é positivo; assim, é subida.

.